

УДК 621.372.8

ЕЛЕКТРОМАГНІТНЕ ПОЛЕ БОЧКОПОДІБНОГО ПОЛОГО РЕЗОНАТОРА

DOI 10.36994 / 2788-5518-2023-01-05-04

Почерняєв В.М., д.т.н., проф. Національна академія Служби безпеки України, Київ, Україна.
vpochernyaev@gmail.com

Сивкова Н.М., док. філос. Національна академія Служби безпеки України, Київ, Україна.
natsivonat@gmail.com

Анотація: В статті досліджено електромагнітне поле бочкоподібного полого резонатора. Відзначимо, що у роботах К.М. Цибізова розроблено підхід визначення полів хвелеводних резонаторних пристроїв із змінним поперечним перерізом. У цій роботі цей підхід поширений для бочкоподібного полого резонатора. Рішення рівняння Ейрі, якими скористався К.М. Цибізов є наближеними до рішень, одержаних через рішення рівняння, що зводиться до однієї з форм гіпергеометричного рівняння або рівняння Вебера. Радіальна та азимутальна складові поля бочкоподібного полого резонатора відповідним складовим поля полого циліндричного резонатора, а поздовжня складова описується виродженою гіпергеометричною функцією. В роботі наведено конструкцію бочкоподібного хвелеводного резонатора з металевими торцями та записано вирази для резонансних довжин хвиль бочкоподібного резонатора з металевими торцями для H - та E -коливань. Наведені резонансні довжини хвиль та резонансні частоти для двох бочкоподібних резонаторів з металевими торцями у відповідності до циліндричного резонатора з радіусом рівним радіусу торця бочкоподібного резонатора та рівних продольних розмірів. Також в роботі, наведено хвелеводний резонатор з відкритим лівим торцем та записані перші п'ять коренів функцій Ейрі. Розгляд такого резонатора переслідує мету демонстрації узагальненості розглянутого підходу. Наведено конструкцію бочкоподібного резонатора з відкритими торцями, перерізи яких являються критичними. Вказано, що знаходження рішень рівнянь функцій, що описують поздовжній розподіл поля являється демонстрацією узагальненості підходу, розробленого К.М. Цибізовим, а в якості прикладів дослідженні резонатори змінного поперечного перерізу: бочкоподібний хвелеводний резонатор з металевими торцями, хвелеводний резонатор з відкритим лівим торцем та бочкоподібний резонатор з відкритими торцями, які вказані на рисунках.

Ключові слова: бочкоподібний полий резонатор, функції Ейрі, функції Вебера, рівняння Вебера, векторна функція, резонансні частоти.

ELECTROMAGNETIC FIELD OF A BARREL-SHAPED HOLLOW RESONATOR

Vitaly Pochernyaev, Dr.habi., Prof. National Academy of the Security Service of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
vpochernyaev@gmail.com

Nataliia Syvkova, Ph.D. National Academy of the Security Service of Ukraine, Kyiv, Ukraine.
natsivonat@gmail.com

Abstract: In the article is investigates the electromagnetic field of a barrel-shaped hollow resonator. It is significant that in the articles of K.M. Tsibizov developed an approach for determining the fields of waveguide resonator devices with a variable cross section. In this article, this approach is extended to a barrel-shaped hollow resonator. The solution of the Airy equation, which was used by K.M. Tsibizov are approximate solutions obtained through solving an equation that reduces to one of the forms of the hypergeometric equation or the Weber equation. The radial and azimuthal components of the field of a barrel-shaped hollow resonator are the corresponding components of the field of a hollow cylindrical resonator, and the longitudinal component is described by a degenerate hypergeometric function. In this article presents the design of a barrel-shaped waveguide resonator with metal ends and writes expressions for the resonant wavelengths of a barrel-shaped resonator with metal ends for H - and E -oscillations. The resonant wavelengths and resonant frequencies for two barrel-shaped resonators with metal ends are given in accordance with a cylindrical resonator with an equal end radius of the barrel-shaped resonator and equal longitudinal dimensions. The article also presents a waveguide resonator with an open left end and writes down the first five roots of the Airy functions. The consideration of such a resonator aims at demonstrating the generality of the considered approach. The design of a barrel-shaped resonator with open ends, the sections of which are critical, is presented. It is indicated that finding solutions to the equations of functions that describe the longitudinal distribution of the field is a demonstration of the generalization of the approach developed by K.M. Tsibizov, and as examples of the study of resonators of variable cross section: a barrel-shaped waveguide resonator with metal ends, a waveguide resonator with an open left end, and a barrel-shaped resonator with open ends, which are shown in the figures.

Keywords: *barrel-shaped hollow resonator, Airy function, Weber function, Weber frequency, vector function, resonant frequencies.*

Вступ

У техніці НВЧ широке застосування знаходять резонатори з високою навантаженою добротністю, для якої необхідно мати високу власну добротність. Як відомо власні добротності циліндричних полів резонаторів для електричних та магнітних типів хвиль у першому наближенні пропорційні значенню LR де L – довжина циліндричного резонатора, R - його радіус. Полий резонатор у вигляді бочки має утворюючу, відмінну від лінійної і при фіксованому значенні L , може мати більше усереднене значення R_{cp} в порівнянні з радіусом циліндричного резонатора. Тоді, при одній і тій же довжині резонатора власна добротність бочкоподібного резонатора буде вищою за власну добротність циліндричного резонатора.

У роботах К. М. Цибізова [1-3] розглянуті циліндричні резонатори змінного поперечного перерізу з відкритими торцями, як резонатори складного профілю з утворюючою у вигляді параболи. У роботі [2, с.94] зазначено, що рішення резонаторних пристроїв складного профілю з такою твірною можна отримати, використовуючи рівняння Вебера, але "отримання рішення на цьому шляху важко, тому що воно виражається через порівняно рідко представлені в літературі функції Вебера". Якщо парабола апроксимована лінійною функцією, то рівняння Вебера переходить до рівняння Ейрі. Вирішення такого диференціального рівняння виражаються через функції Ейрі. Перевагами цього підходу стало не тільки визначення необхідних величин у явному вигляді для складного резонатора профілю з відкритими торцями, а й отримання безперервного рішення поблизу критичних перерізів і відсутність невизначеності в самому критичному перерізі. На наш погляд, після застосування академіком В. А. Фоком цих функцій у роботах з теорії дифракції та поширення хвиль, що увійшли до [4], найбільш ґрунтовне застосування функцій Ейрі в теорії та техніці НВЧ, продемонстровано в [1-3].

Метою цієї роботи є дослідження електромагнітного поля бочкоподібних полів резонаторів з металевими торцями, з відкритим лівим торцем, з відкритими торцями.

Виконання досліджень

Відомо, що рішення трьохвимірного рівняння Гельмгольца для циліндричного резонатора будь-якої форми поперечного перерізу може бути записано у вигляді [5]:

$$U_{\text{ц}} = \left[\sum_m (J_m(\chi_{mn}r) + PN_m(\chi_{mn}r))(C_m \sin m\varphi + D_m \cos m\varphi) \right] \begin{pmatrix} \sin B_z \\ \cos B_z \end{pmatrix}, \quad (1)$$

де $J_m(\chi_{mn}r)$, $N_m(\chi_{mn}r)$ - функції Бесселя першого та другого порядку відповідно, $P = \text{const}$, C_m , D_m - постійні коефіцієнти, які визначені граничними умовами. Допустимість такого підходу – прямої суперпозиції, безпосередньо слідує з лінійності та однорідності хвильового рівняння. Такий підхід можливий і у випадку бочкоподібного резонатора, як резонатора перемінного поперечного перерізу. Рішення буде мати вигляд:

$$U_{\text{б}} = (J_m(\chi_{mn}r) + PN_m(\chi_{mn}r)) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} \sum_p K_p \begin{Bmatrix} \sin B_{pz} \\ \cos B_{pz} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

де K_p – невідомі коефіцієнти, що належать визначенню.

Підхід К.М. Цибізова до вирішення резонаторних пристроїв перемінного поперечного перерізу полягає в тому, щоб підібрати відповідне диференціальне рівняння, яке описує позовжній розподіл поля. Покажемо це на прикладі трьох бочкоподібних резонаторів.

На рис.1 показаний профіль бочкоподібного хвильового резонатора з металевими торцями.

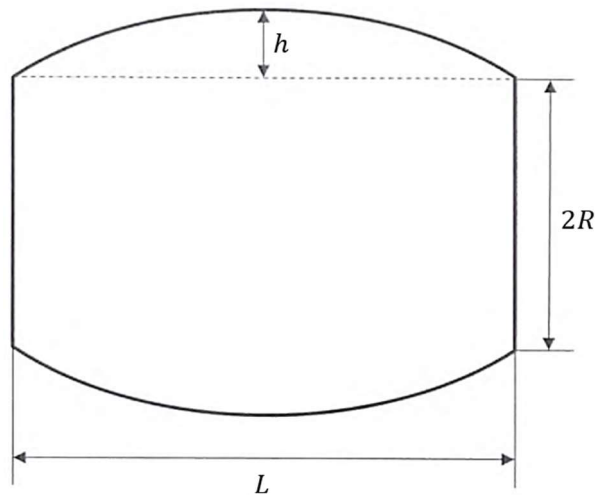


Рис.1. Профіль бочкоподібного хвильоводного резонатора з металевими торцями

Функція, що описує поздовжній розподіл поля, може бути знайдена з рівняння виду:

$$Z''(z) + G(z)Z(z) = 0. \quad (3)$$

Визначення функції $Z(z)$ виключає необхідність знаходження коефіцієнтів K_p в (2). Як показано в [1-3], при утворюючій у вигляді параболи рівняння (3) записується у вигляді:

$$Z''(z) + (c^2 - z^2)Z(z) = 0. \quad (4)$$

Коли утворюючу можна апроксимувати лінійною функцією, то К.М. Цібизов «відходить» від рішення рівняння Вебера (4), і вирішує рівняння виду:

$$Z''(z) + zZ(z) = 0. \quad (5)$$

Рішеннями рівняння (5) є функції Ейрі.

Перейдемо до рішення рівняння (4). Зробимо заміну перемінної: $\xi = z\sqrt{2p}$, $\eta(\xi) = Z(z)$ і позначив $2c^2 = 8k$, можна прийти до однієї з форм виродженого гіпергеометричного рівняння:

$$4\eta''(\xi) - (p\xi^2 - 8k)\eta(\xi) = 0. \quad (6)$$

Рішення рівняння (6) записується у вигляді:

$$\eta(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\right) {}_1F_1\left(k, \frac{1}{4}, \frac{\xi^2}{2p}\right),$$

де ${}_1F_1$ - вироджена гіпергеометрична функція, $p = 1, 2, 3, \dots$

Зробивши зворотне перетворення отримаємо:

$$Z(z) = 2^{-\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}} {}_1F_1\left(\frac{c^2}{4}, \frac{1}{4}, pz^2\right). \quad (7)$$

Використовуючи умови першої змішаної крайової задачі для бочкоподібного полого резонатора з металевими торцями, можна побачити, що її рішення створює систему власних функцій:

$$U_6 = 0 \text{ при } r = R, \frac{\partial U_6}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, L,$$

$$U_{mnp}^{(e)} = N_{mnp}^{(e)} J_m(\chi_{mn} r) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} Z'(z),$$

де $Z'(z)$ з формули (7).

Друга змішана крайова задача:

$$\frac{\partial U_6}{\partial z} = 0 \text{ при } r = R, U_6 = 0 \text{ при } z = 0, L \text{ і відповідно } U_{mnp}^{(h)} = N_{mnp}^{(h)} J_m(\chi'_{mn} r) \begin{Bmatrix} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{Bmatrix} Z(z).$$

Випишемо вираз для резонансних довжин хвиль бочкоподібного резонатора з металевими торцями:

- для Н-коливаний:

$$\lambda_{mnp} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{R_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{2\sqrt{h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}\right)^2}}, \quad (8)$$

де μ_{mn} - корінь рівняння $J'_m(\mu_{mn}) = 0$,

- для Е-коливаний:

$$\lambda_{mnp} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{mn}}{R_{cp}}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{2\sqrt{h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}}\right)^2}}, \quad (9)$$

де ε_{mn} - корінь рівняння $J_m(\varepsilon_{mn}) = 0$.

Другий доданок під радикалом в знаменнику виразів (8) та (9) для резонансних довжин хвиль є подовжнім хвильовим числом. Якщо покласти $h = 0, R_{cp} = R$, то «бочка» становиться «циліндром» і формули (8), (9) переходять в формули для резонансних довжин хвиль циліндричного резонатора.

Таблиця 1

Резонансні довжини хвиль та резонансні частоти для двох бочкоподібних резонаторів з металевими торцями у відповідності до циліндричного резонатора з радіусом рівним радіусу торця бочкоподібного резонатора та рівних продольних розмірів L

Тип резонатора Параметри резонатора	Циліндричний резонатор $L = 5,85$ см, $R = 2,3$ см	Бочкоподібний резонатор $L = 5,85$ см	
		$R_{cp} = \frac{9}{8} R$	$R_{cp} = \frac{7}{6} R$
Резонаторні довжини хвиль коливання H_{111}	6,52 см	7,136 см	7,3 см
Резонаторні частоти коливання H_{111}	4,6 ГГц	4,2 ГГц	4,1 ГГц

В табл.1 наведені резонансні довжини хвиль та резонансні частоти для двох бочкоподібних резонаторів з металевими торцями у відповідності до циліндричного резонатора з радіусом рівним радіусу торця бочкоподібного резонатора та рівних продольних розмірів L . Як видно з

табл.1, бочкоподібний резонатор можливо використовувати нижче по частоті практично для тих же габаритів та вимірювати резонансну частоту шляхом зміни величини R_{cp} .

Підхід К.М. Цибізова шляхом рішення рівняння (5) можливий і у випадку бочкоподібного резонатора з металевими торцями. Метод асимптотичного інтегрування виразу (5) приводить до рішення через функції Ейри:

$$Z(z) = \sqrt[4]{\frac{t}{p(z)}} [u(t) + jv(t)],$$

де $u(t)$ та $v(t)$ – функції Ейри [1-4], а параметр t визначається з співвідношення:

$$\int_{z_0}^z \sqrt{-p(z)} dz = \frac{2}{3} (-t)^{\frac{3}{2}}, (z > z_0, t < 0),$$

$$\int_z^{z_0} \sqrt{p(z)} dz = \frac{2}{3} (t)^{\frac{3}{2}}, (z < z_0, t > 0),$$

При великих t функції Ейри можуть бути замінені головними членами їх асимптотичних розкладів. Тоді маємо:

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{p(z)}} \exp\left(\pm \int_z^{z_0} \sqrt{p(z)} dz\right), p > 0, z - z_0 < 0,$$

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{-p(z)}} \exp\left(\pm j \int_{z_0}^z \sqrt{-p(z)} dz\right), p < 0, z - z_0 > 0.$$

На рис.2 наведено хвилеводний резонатор з відкритим лівим торцем. Розгляд такого резонатора переслідує мету демонстрації узагальненості розглянутого підхода. Будемо вважати, що переріз лівого торця такого резонатора – «півбочки», є критичним. Тоді, функція, яка описує продольний розподіл поля, визначається з рівняння:

$$Z_1''(z) + (az + b)Z_1(z) = 0. \quad (10)$$

Зробимо заміну змінної: $\xi = az + b$, $\eta(\xi) = Z_1(z)$. Отримаємо:

$$\eta''(\xi) + \left(\frac{1}{a^2}\right)\xi\eta(\xi) = 0.$$

Рішення має вигляд: $\eta(\xi) = \sqrt{\xi} J_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{2}{3a}\right)\xi^{\frac{3}{2}}\right)$. Рішення рівняння (10) отримує вигляд:

$$Z_1(z) = \sqrt{az + b} J_{\frac{1}{3}}\left(\left(\frac{2}{3a}\right)(az + b)^{\frac{3}{2}}\right). \quad (11)$$

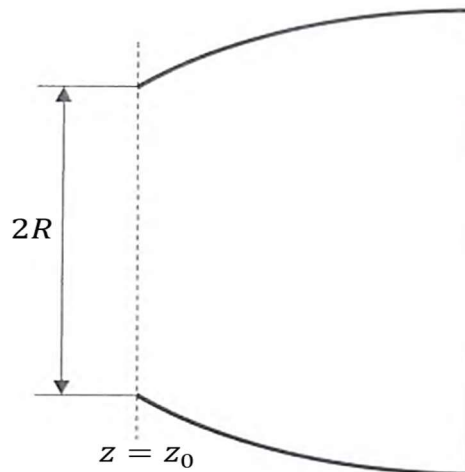


Рис.2. Хвильоводний резонатор з відкритим лівим торцем

При $a = 1, b = 0$ отримаємо результат робіт [1-3].

Крайові умови: вимога кінцевості рішення при $z < z_1$ та умова, яка впливає з рівності нулю дотичної складової електричного поля на ідеально провідниковій торцевій стінці хвильовода ($z = z_L$). Рівняння для визначення резонансних хвильових чисел для H -хвиль:

$$\int_{z_0}^{z_1} \sqrt{-p(z)} dz = \frac{2}{3} (-t_i^0)^{\frac{3}{2}},$$

де $p(z) = -1 + \chi_h^2/k^2(z)$, t_i^0 - i -корінь функції $v(t)$.

Вираз для визначення резонансних хвильових чисел для E -хвиль:

$$\int_{z_0}^{z_1} \sqrt{-p(z)} dz = \frac{2}{3} (-t_i')^{\frac{3}{2}},$$

де $p(z) = -1 + \chi_e^2/k^2(z)$, t_i' - i -корінь функції $v'(t)$.

Перші п'ять коренів функцій $v(t)$ та $v'(t)$ зведені в табл.2.

Таблиця 2
Корені функцій $v(t)$ та $v'(t)$

i	t_i^0	t_i'
1	2,338	1,019
2	4,088	3,248
3	5,52	4,82
4	6,787	6,163
5	7,944	7,372

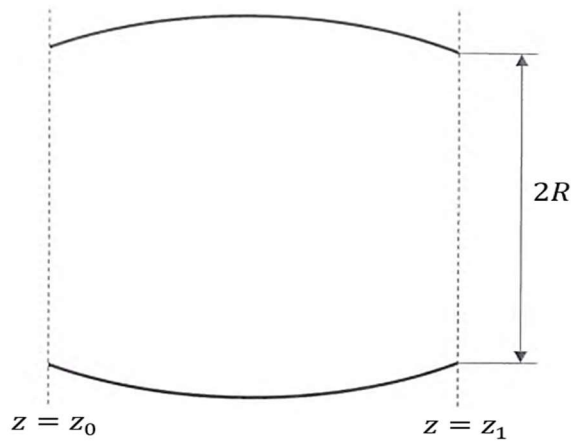


Рис.3. Бочкоподібний резонатор з відкритими торцями, перерізи яких являються критичними

На рис.3 показано бочкоподібний резонатор з відкритими торцями, перерізи яких являються критичними. Крайовою умовою є вимога кінцевості рішення на всій осі z . В цьому випадку функція $p(z)$ має два корені, які відповідають двом критичним перерізам $z = z_0$ та $z = z_1$. Якщо ці корені прості, то від рівняння (4) можна перейти до рівняння виду:

$$Z_2''(z) + (2s + 1 - z^2)Z_2(z) = 0. \quad (12)$$

Параметр s приймає точно цілі значення і рішення рівняння (12) має наступний вигляд:

$$Z_2(z) = \exp\left(\frac{-z^2}{2}\right) H_s(z), \quad (13)$$

де $H_s(z)$ – поліном Ерміта.

Рівняння для визначення резонансних хвильових чисел з результатом робіт [1-3]:

$$\int_{z_0}^{z_1} \sqrt{-p(z)} dz = \left(s + \frac{1}{2}\right) \pi, \text{ при } s = 1, 2, 3, \dots$$

$$p(z) = -1 + \chi_e^2/k^2(z) - \text{для } E\text{-хвиль},$$

$$p(z) = -1 + \chi_h^2/k^2(z) - \text{для } H\text{-хвиль}.$$

Висновки

На закінчення відмітимо, що знаходження рішень рівнянь (4), (10), (12) являється демонстрацією узагальненості підходу, розробленого К.М. Цибизовим, а в якості прикладів дослідженні резонатори змінного поперечного перерізу, вказані на рис.1, 2, 3. Поперечний розподіл електромагнітного поля в бочкоподібних поглинаючих резонаторах не відрізняється від поперечного розподілу поля в полому циліндричному резонаторі, а продольний розподіл поля визначається виразами (7), (11), (13).

Література

1. Коган Н.Л., Машковцев Ю.М., Цибизов К.Н. Сложные волноводы системы. Л: Судпромгиз, 1963. 351 с.
2. Машковцев Б.М., Цибизов К.Н., Емелин Б.Ф. Теория волноводов. М: Наука, 1966. 356 с.
3. Почерняев В.Н., Цибизов К.Н. Теория сложных волноводов. Киев: Науковий Світ, 2003. 224с.
4. Фок В.А. Проблемы теории дифракции и распространения электромагнитных волн. М: Сов. радио, 1970. 536 с.
5. Кисунько Г.В. Электродинамика полых систем. Л: ВАС, 1949. 469 с.

References

1. Kogan N.L., Mashkovtsev Yu.M., Tsibizov K.N. Slozhnyie volnovodyi sistemyi. L: Sudpromgiz, 1963. 351 s.
2. Mashkovtsev B.M., Tsibizov K.N., Emelin B.F. Teoriya volnovodov. M: Nauka, 1966. 356 s.
3. Pochernyaev V.N., Tsibizov K.N. Teoriya slozhnyih volnovodov. Kiev: Naukoviy Svlt, 2003. 224s.
4. Fok V.A. Problemy teorii difraktsii i rasprostraneniya elektromagnitnyh voln. M: Sov.radio, 1970. 536 s.
5. Kisunko G.V. Elektrodinamika polyih sistem. L: VAS, 1949. 469 s.