

УДК 621.372.8

МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОПРОМЕНЕВОГО КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ

DOI 10.36994 / 2788-5518-2023-01-05-05

Почерняєв В.М., д.т.н., професор, Національна академія Служби безпеки України, Київ, Україна. vpochernyaev@gmail.com

Сушанова В.С., к.т.н., Київський фаховий коледж зв'язку, Київ, Україна. povviktoriya@gmail.com

Анотація. У статті здійснено моделювання багатопроменевого каналу зв'язку з двома діапазонами або піддіапазонами (інтервалами) частот, системна функція якого виражається у замкнутому вигляді через еліптичні функції. Багатопроменевість призводить до того, що завжди існує певна кількість помилок, які характеризують нижню межу ймовірності помилок незалежно від застосовуваних методів завадостійкого кодування та необмеженого збільшення енергетичного потенціалу радіолінії. Математичне моделювання багатопроменевого каналу зв'язку передбачає спільний облік тимчасових затримок та доплерівського зсуву частоти сигналу, що приймається. Показано зв'язок між передавальною функцією $H(\omega, t)$ та системною функцією $S(\tau, \omega)$. У роботі вперше застосовано апарат еліптичних функцій та еліптичних інтегралів до визначення системної функції, яка у відомих літературних джерелах визначається за допомогою математичного апарату статистичного аналізу. Показано застосування такого підходу до мобільних радіосистем, що працюють у декількох частотних інтервалах, як, наприклад, комбінованої мобільної цифрової тропосферно-радіорелейної станції або цифрової тропосферної станції. Їхня робота здійснюється у двох діапазонах частот або двох піддіапазонах частот (передача/прийм). Тому побудувати математичну модель багатопроменевого каналу зв'язку з визначенням системних функцій у даному випадку стає досить складним завданням. Ця ситуація ускладнюється, якщо застосовується система адаптації за частотою, коли для боротьби із замираннями та зосередженими перешкодами використовується кілька інтервалів частот, у найпростішому випадку – два інтервали. У статті викладено підхід щодо подання системних функцій через еліптичні функції, що дозволяє у явному вигляді визначити передавальну функцію багатопроменевого каналу зв'язку. Для розглянутого випадку двочастотних інтервалів кінцевий вираз записано через тета-функції та повний еліптичний інтеграл першого роду.

Ключові слова: багатопроменевий канал зв'язку, частотно-рознесений прийом, частотно-селективні замирання, системна функція, передавальна функція, еліптична функція, тета-функція, комбінована мобільна цифрова тропосферно-радіорелейна станція, цифрова тропосферна станція.

SIMULATION OF A MULTIPATH COMMUNICATION CHANNEL

Pochernyaev Vitaly, Doctor of Technical Sciences, Prof., National Academy of the Security Service of Ukraine, Kyiv, Ukraine. vpochernyaev@gmail.com

Sushanova Viktoriia, Candidate of technical sciences, Kyiv Professional College of Communication, Kyiv, Ukraine. povviktoriya@gmail.com

Abstract. In the article, the simulation of a multipath communication channel with two bands or subbands (intervals) of frequencies, the system function of which is expressed in a closed form through elliptic functions. A multipath communication channel is a linear system with time various parameters. Multipath leads to the fact that there is always a certain number of errors. They characterize the lower limit of the probability of errors, regardless of the applied methods of error-correcting coding and an unlimited increase in the energy potential of the radio link. Mathematical simulation of a multipath communication channel provides the joint consideration of time delays and Doppler frequency shift of the received signal. The correlation between the transfer function $H(\omega, t)$ and the system function $S(\tau, \omega)$ is shown. In the article at the first time, the mathematical theory of elliptic functions and elliptic integrals is applied to the definition of a system function, which in known literature sources is determined using the mathematical methods of statistical analysis. In article is shown the application an approach to mobile radio systems, which are operating in several frequency bands, such as a combined mobile digital troposcatter-radiorelay station or a digital troposcatter station. Their work is carried out in two frequency bands or two frequency subbands (transmit / receive). Therefore, in this case it becomes very difficult to create a mathematical model of a multipath communication channel with the definition of system functions. This situation is complicated if a frequency adaptation system is used. At the same time, several frequency intervals are used to combat fading and interferences, in the simplest case – two intervals. The article describes the approach to the representation of system functions through elliptic functions. This allows to have close form of the transfer function for the

multipath communication channel. For the considered case of two-frequency intervals, the final expression is written in terms of theta-functions and the complete elliptic integral of the first kind.

Keywords: *multipath communication channel, frequency-spaced reception, frequency-selective fading, system function, transfer function, elliptic function, theta-function, combined mobile digital troposcatter-radiorelay station, digital troposcatter station.*

Вступ

При моделюванні багатопробієвих каналів зв'язку досліджують апарат системних функцій. Для реальних каналів зв'язку системні функції, як правило, не стаціонарні і для їх опису адекватним математичним апаратом є статистичний аналіз [1]. Однак застосування цього математичного апарату ускладнює вирішення великого числа конкретних практичних завдань. Це ускладнення посилюється, коли доводиться боротися не тільки з частотно-селективними замираннями, але і з зосередженими завадами сучасними способами, як наприклад, повторна передача однієї і тієї ж інформації на декількох частотах, що відповідають різним інтервалам частот. Тому необхідно представити системні функції багатопробієвих каналів зв'язку з повторною передачею інформації на декількох частотах за допомогою еліптичних інтегралів і еліптичних функцій. Професор К.М. Цибізов у своїх роботах використовував апарат спеціальних функцій математичної фізики. В даній роботі, що присвячена великому Вчителю, кінцевий результат з моделювання багатопробієвого каналу зв'язку отримано за допомогою апарата спеціальних функцій – еліптичних інтегралів першого роду, повних еліптичних інтегралів першого роду, еліптичних функцій Якобі, тета-функцій.

Метою роботи – є моделювання багатопробієвого каналу зв'язку з двома діапазонами або піддіапазонами (інтервалами) частот, системна функція якого виражається в замкнутому вигляді через еліптичні інтеграли та еліптичні функції Якобі.

Основний зміст

Один із ключових напрямів розвитку цифрових тропосферних систем зв'язку – збільшення швидкості інформації, що передається. Це вимагає подальшого вдосконалення моделей багатопробієвого каналу зв'язку та методик розрахунку характеристик багатопробієвості. Багатопробієвий канал зв'язку є лінійною системою з параметрами, що змінюються в часі, вихідний сигнал $y(t)$ якого пов'язаний з вхідним сигналом $x(t)$ наступною залежністю [1]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (1)$$

де $h(t, \tau)$ - імпульсна реакція каналу, яка представляє відгук каналу в момент часу t на імпульс, поданий на вхід каналу в момент часу $(t - \tau)$ і яка є дійсною величиною. З фізичної точки зору імпульсна реакція каналу являє собою залежність середньої потужності сигналу, що приймається від часу τ при випромінюванні імпульсу, тому іноді званої енергетичним спектром затримок. Для багатопробієвого каналу зв'язку справедлива наступна залежність вихідного сигналу $y(t)$ від комплексного спектру $X(\omega)$ вхідного сигналу $x(t)$ [1]:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega, t) X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega, \quad (2)$$

де $H(\omega, t)$ – передавальна функція каналу, що характеризує залежний від часу відгук каналу на імпульс частоти $\exp(j\omega t)$.

З виразів (1) та (2) випливає:

$$h(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega, t) \exp(j\omega \tau) d\omega,$$

$$H(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau.$$

Багатопроменевість каналу зв'язку проявляється в тому, що сигнал від передавача до приймача проходить відстань різними шляхами. Сигнал для кожного шляху в момент часу t визначатиметься добутком $h_i(t, \tau)x(t - \tau)$, а сумарний сигнал виразом (1). Цей вираз можна вважати границею суми зважених та затриманих відгуків на сигнал $x(t)$, серед якої і-відгук, що має затримку в інтервалі від τ до $(\tau + d\tau)$, з'являється на виході каналу з вагою $h_i(t, \tau)d\tau$. Вираз (2) можна вважати границею суми відгуків каналу на різні спектральні компоненти сигналу, кожна з яких займає смугу частот від ω до $(\omega + d\omega)$ і множиться на відповідне значення передавальної функції $H(\omega, t)$ [1].

Зазначимо, що багатопроменевість призводить до того, що завжди існує певне число помилок, які характеризують нижню границю ймовірності помилок незалежно від застосовуваних методів завадостійкого кодування та необмеженого збільшення енергетичного потенціалу радіолінії.

Математичне моделювання багатопроменевого каналу зв'язку повинно передбачати спільне врахування часових затримок і доплерівського зсуву частоти сигналу, що приймається. Спектр доплерівських частот $\tilde{\omega}$ імпульсної реакції каналу $h(t, \tau)$ характеризується системною функцією $\tilde{S}(\tau, \tilde{\omega})$ [2]:

$$\tilde{S}(\tau, \tilde{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) \exp(-j\tilde{\omega}t) dt, \quad (3)$$

$$h(t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\tau, \tilde{\omega}) \exp(-j\tilde{\omega}t) d\tilde{\omega}. \quad (4)$$

Якщо вважати канал зв'язку частотно-часовим фільтром [1], то вираз для сигналу на виході каналу можна одержати, підставивши (4) у (1):

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) \tilde{S}(\tau, \tilde{\omega}) \exp(j\tilde{\omega}t) d\tilde{\omega} d\tau. \quad (5)$$

Фізична суть виразу (5) полягає в тому, що суму затриманих і зсунутих за частотою відгуків через багатопроменевість каналу зв'язку можна інтерпретувати як відгук із затримкою в інтервалі від τ до $(\tau + d\tau)$ та доплерівським зсувом частоти в інтервалі $\tilde{\omega}$ до $(\tilde{\omega} + d\tilde{\omega})$ з вагою $\tilde{S}(\tau, \tilde{\omega})$.

Зв'язок між передавальною функцією $H(\omega, t)$ і системною функцією $\tilde{S}(\tau, \tilde{\omega})$ визначається подвійним перетворенням Фур'є:

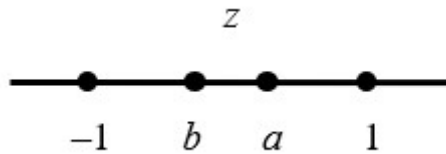
$$H(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{S}(\tau, \tilde{\omega}) \exp(-j(\omega\tau - \tilde{\omega}t)) d\tilde{\omega} d\tau. \quad (6)$$

Стан багатопроменевого каналу зв'язку випадковим чином змінюється в області визначення змінних $t, \tau, \omega, \tilde{\omega}$, які є аргументами передавальної та системної функції, що зв'язують сигнали на вході та виході каналу зв'язку.

Для визначення системної функції використовують математичний апарат статистичного аналізу. Однак, якщо робота радіотехнічної системи, такої, наприклад, як комбінованої мобільної цифрової тропосферно-радіорелейної станції (МЦТрРПС) або цифрової тропосферної станції (ЦТрС), здійснюється у двох діапазонах частот або двох піддіапазонах (інтервалах) частот (передавання/приймання), то побудувати математичну модель багатопроменевого каналу зв'язку з визначенням системних функцій у цьому разі стає вельми важким завданням.

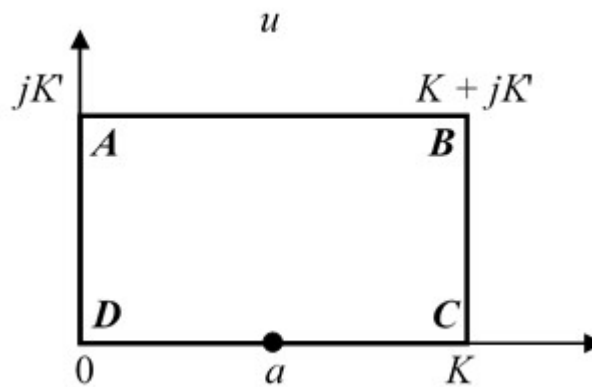
Ця ситуація ускладнюється, якщо застосовується система адаптації за частотою, коли для боротьби із завмираннями і зосередженими завадами використовується кілька інтервалів частот, у найпростішому випадку - два інтервали. Така система адаптації за частотою застосовується в деяких ЦТрС і реалізується в МЦТрРПС.

Спочатку задамо на дійсній осі площини z (рис. 1) два кінцеві інтервали: $(-1, b)$, $(a, 1)$.

Рис.1. Кінцеві інтервали дійсної осі z

Фізична інтерпретація цих двох інтервалів - частотні піддіапазони ЦТРС, в одному з яких здійснюється передавання сигналів, а в другому - їх приймання. Частотні піддіапазони рівноправні з погляду передавання і приймання сигналів. Так само функціонує і тропосферна компонента МЦТРРС.

Для введення еліптичних функцій відобразимо конформно верхню половину площини z на прямокутник площини u як це показано на рис.2.

Рис.2. Прямокутник площини u

Для цього знайдемо величину k ($0 < k < 1$) за такою формулою:

$$k^2 = \frac{2(a-b)}{(1+a)(1-b)}.$$

Враховуючи, що $b = 1 - 2cn^2a/dn^2a$, формулою конформного відображення є:

$$z = \frac{sn^2a \cdot cn^2u + cn^2a \cdot sn^2u}{sn^2a - sn^2u}, \quad (7)$$

де sna , snu , cna , cnu - еліптичні функції Якобі.

При цьому точки $-1, b, a, 1 = z$ переходять відповідно в точки $K, K + jK', jK', 0 = u$. Відповідно до [2] символи K і K' позначають повні еліптичні інтеграли першого роду для модуля k і додаткового модуля $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Справедливі такі співвідношення:

$$k^2 = m, k'^2 = m_1$$

де m і m_1 - параметр і додатковий параметр теорії еліптичних функцій відповідно.

На підставі формули (7) отримаємо:

$$\frac{du}{dz} = \frac{\sqrt{1+a}\sqrt{1-b}}{2\sqrt{(z^2-1)(z-a)(z-b)}},$$

$$z = 1 + \frac{sna \cdot cna}{dna} \left\{ \frac{\theta'(a+u)}{\theta(a+u)} + \frac{\theta'(a-u)}{\theta(a-u)} - 2 \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right\},$$

де dna - еліптична функція Якобі;

$\frac{\theta'(a+u)}{\theta(a+u)}, \frac{\theta'(a-u)}{\theta(a-u)}, \frac{\theta'(a)}{\theta(a)}$ - логарифмічні похідні тета-функцій [2].

Важливість тета-функцій полягає в тому, що кожна з еліптичних функцій Якобі може бути виражена як відношення двох тета-функцій:

$$\begin{aligned} sna &= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\theta_1(a/2K)}{\theta_0(a/2K)}, \\ cna &= \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\theta_2(a/2K)}{\theta_0(a/2K)}, \\ dna &= \sqrt{k'} \frac{\theta_3(a/2K)}{\theta_0(a/2K)}. \end{aligned}$$

Тета-функції можна визначити такими розкладаннями:

$$\begin{aligned} \theta_0(z) &= 1 - 2q \cos 2\pi z + 2q^4 \cos 4\pi z - 2q^9 \cos 6\pi z + \dots + (-1)^n 2q^{n^2} \cos 2n\pi z + \dots, \\ \theta_1(z) &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi z - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi z + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi z - \dots + (-1)^n 2q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin \sin (2n+1)\pi z + \dots, \\ \theta_2(z) &= 2q^{\frac{1}{4}} \cos \pi z - 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3\pi z + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5\pi z - \dots + (-1)^n 2q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos \cos (2n+1)\pi z + \dots, \\ \theta_3(z) &= 1 + 2q \cos 2\pi z + 2q^4 \cos 4\pi z + 2q^9 \cos 6\pi z + \dots + 2q^{n^2} \cos 2n\pi z + \dots, \end{aligned}$$

де $z = a/2K$

Записавши системну функцію в замкненому вигляді у формулі (6), можна знайти і явний вигляд передавальної функції $H(\omega, t)$. Для цього треба знайти функцію відображення $\hat{S}(z)$, яка є відображенням системної функції $\tilde{S}(\tau, \tilde{\omega})$ у комплексній площині z . Функція $\hat{S}(z)$ має вигляд:

$$\hat{S}(z) = \int_1^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(z - a)(z - b)}}.$$

Функція $\hat{S}(z)$ обертається на нескінченність лише на нескінченності, де має полюс першого порядку, а логарифмічної особливості не має. Тому, функцію $\hat{S}(z)$ можна представити лінійною комбінацією еліптичних інтегралів або через комбінацію тета-функцій. Тоді, з урахуванням перетворень маємо:

$$\hat{S}(z) = -\frac{1}{p} \left\{ \frac{\pi u}{K} + K' \left[\frac{\theta'(a+u)}{\theta(a+u)} - \frac{\theta'(a-u)}{\theta(a-u)} \right] \right\}.$$

Параметр p знаходиться за умови, що $u \rightarrow a, |z| \rightarrow \infty$. Тоді маємо:

$$p = \frac{K' dna}{sna \cdot cna}.$$

Еліптичні інтеграли можна обчислити за таблицями за допомогою рядів за допомогою номограм. Повні еліптичні інтеграли, у яких модуль k є комплексною змінною, обчислюються за допомогою таблиць і шляхом розкладання в ряди [3].

Зазначимо, що не слід плутати параметр p з параметром Якобі q [2], який дорівнює $\exp(-\pi K'/K)$ і за яким тета-функція розкладається в ряд.

Зазначимо, що цифрові радіорелейні станції (ЦРРС) працюють в одному діапазоні частот, у якому здійснюють передавання і приймання сигналів. Це ж поширюється і на багатодіапазонні ЦРРС. Завдання подання системної функції багатопроменового каналу зв'язку для одного частотного інтервалу спроститься. Припустимо, що на комплексній площині z задано інтервал (a, b) . Тоді, не порушуючи узагальненості, запишемо:

$$a = k^2 (0 < k < 1), b = 1.$$

За допомогою конформного відображення маємо:

$$a = \frac{1}{sn^2(u, k)},$$

$$\frac{du}{da} = -\frac{1}{2\sqrt{a(a-k^2)(a-1)}}$$

Тоді, функція $\hat{S}(z)$ має такий вигляд:

$$\hat{S}(z) = -\frac{\theta(0)\theta(u-a)}{\theta(u)\theta(a)} e^{\frac{aK'}{K}},$$

де $\theta(0), \theta(u-a), \theta(u), \theta(a)$ - тета-функції.

Нехай повторна передача здійснюється в інтервалах частот $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots [a_n, b_n]$. У комплексній площині $\tilde{\omega}$ введемо раціональні функції $R(\tilde{\omega})$ і $P(\tilde{\omega})$:

$$R(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}(\tilde{\omega} - a_1)(\tilde{\omega} - b_1) \dots (\tilde{\omega} - b_n),$$

$$P(\tilde{\omega}) = (\tilde{\omega} - a_1)(\tilde{\omega} - a_1) \dots (\tilde{\omega} - a_n).$$

Системні функції можна записати в комплексній площині у наступному вигляді:

$$Q_1(\xi, \tilde{\omega}) = \cos \cos(\xi \sqrt{\tilde{\omega}}) + j \frac{\sqrt{R(\tilde{\omega})} \sin \sin(\xi \sqrt{\tilde{\omega}})}{P(\tilde{\omega}) \sqrt{\tilde{\omega}}}, \quad (8)$$

$$Q_2(\xi, \tilde{\omega}) = \cos \cos(\xi \sqrt{\tilde{\omega}}) - j \frac{\sqrt{R(\tilde{\omega})} \sin \sin(\xi \sqrt{\tilde{\omega}})}{P(\tilde{\omega}) \sqrt{\tilde{\omega}}}. \quad (9)$$

Системні функції не є цілими, але мають по одному кореню в кожному інтервалі частот. Якщо функції $\ln \ln Q_1(\xi, \tilde{\omega})$ і $\ln \ln Q_2(\xi, \tilde{\omega})$ мають простий полюс в точці, то логарифмічними особливими точками з від'ємними відніманнями відрахуваннями є тільки точки $\tilde{\omega} = \infty$. Тому, число нулів цих функцій дорівнює n , і всі лежать по одному в кожному із зазначених вище інтервалів. Ці властивості виправдовують введення такого представлення системних функцій і вказують на апарат еліптичних інтегралів і еліптичних функцій, яким необхідно скористатися [2].

Якщо функції $Q_1(\xi, \tilde{\omega})$ і $Q_2(\xi, \tilde{\omega})$ в (1, 2) є раціональними від ξ і $\tilde{\omega}$, де $\tilde{\omega}$ є многочленом третьої або четвертої ступеня від ξ , то $\int Q_1(\xi, \tilde{\omega}) d\xi$ і $\int Q_2(\xi, \tilde{\omega}) d\xi$ називаються еліптичними. Як відомо, еліптичні інтеграли в загальному випадку не виражаються через елементарні функції [2,3].

Розглянутий випадок передачі і прийому інформації на декількох частотах по суті є частотно-рознесеним прийомом, який є одним із способів боротьби з завмираннями сигналу і зосередженими завадами. Найбільш поширеним способом боротьби з завмираннями в системах тропосферного зв'язку є просторово-рознесений прийом, наприклад [4]. В цьому випадку тропосферна станція має, як правило, дві антени, що працюють на передачу і прийом, але випромінювання і прийом сигналу здійснюється у своїх підсмугах частот в кожному на одній

частоті. Для каналів зв'язку таких систем тропосферного зв'язку явний вид системної функції спрощується. Якщо прийняти $a_1 = k^2 (0 < k < 1)$ і $b_1 = 1$, то за допомогою конформного відображення:

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{sn^2(u, k)}, \quad \frac{du}{d\tilde{\omega}} = -\frac{1}{2\sqrt{\tilde{\omega}(\tilde{\omega}-k^2)(\tilde{\omega}-1)}} \quad (10)$$

комплексна площина відображається на прямокутник [2,3]. У вираженні (10) sn є еліптичною функцією Якобі.

Тепер системна функція може бути представлена через еліптичні функції і еліптичні інтеграли:

$$Q(\xi, \tilde{\omega}) = \frac{\theta(0)\theta(u-j\xi)}{\theta(u)\theta(j\xi)} e^{j\xi K'/K}, \quad (11)$$

де θ - тета-функція; K'/K - повні еліптичні інтеграли першого роду.

Для обчислення повного еліптичного інтегралу першого роду можна скористатися розкладаннями в ряд. В даному випадку величина K приймає наступний вигляд:

$$K = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}\right)^2 k^{2n} + \dots \right\}.$$

Якщо значення k близьке до 1, то вигідніше користуватися розкладанням K в ряд за степеню $k' = \sqrt{1-k^2}$:

$$K = a_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_1 k'^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 a_2 k'^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 a_3 k'^6 + \dots$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ визначаються рівностями:

$$a_0 = \ln \frac{4}{k'}, a_1 = a_0 - 1, \dots, a_n = a_{n-1} - \frac{2}{(2n-1)^2}.$$

Якщо виявиться, що $|k| > 1$, то можна скористатися наступним розкладанням:

$$K = \frac{\pi}{2k} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{k^4} + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{1}{k^6} + \dots \right\} +$$

$$+ j \frac{1}{k} \left\{ \ln 4k + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (\ln 4k - 1) \frac{1}{k^2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 \left(\ln 4k - \frac{7}{6}\right) \frac{1}{k^4} + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\ln 4k - \frac{31}{30}\right) \frac{1}{k^6} + \dots \right\}$$

Важливо відзначити, що в (11) для окремого випадку системна функція виражається через тета-функцію. Це пояснюється тим, що кожна з еліптичних функцій Якобі може бути виражена як відношення двох тета-функцій [2].

Висновки

Таким чином, викладений у роботі підхід щодо подання системних функцій через еліптичні функції дає змогу в явному вигляді визначити передавальну функцію багатопробного каналу зв'язку. Для розглянутого випадку двочастотних інтервалів кінцевий вираз записано через тета-функції і повний еліптичний інтеграл першого роду.

На закінчення відзначимо, що канал зв'язку з частотно-селективними замираннями і схильний до зосереджених перешкод може мати місце і на радіорелейних лініях зв'язку, а не тільки тропосферних. У роботах [5,6] показана перспективність створення комбінованих засобів зв'язку, наприклад, МЦТрРРС. Тому, математичний опис багатопробневих каналів зв'язку за

допомогою системних функцій, що мають явний вигляд і виражених через еліптичні інтеграли і еліптичні функції актуальний для різноманітних каналів зв'язку з багатопроменевістю.

Література

1. J.G.Proakis. Digital communications. NY:McGraw-Hill, 1995. 800p.
2. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Wiley-Interscience, 1993.
3. Jahnke E., Emde F., Lösch F. Tables of higher functions. NY:McGraw-Hill, 1960.
4. Почерняев В.М., Повхліб В.С. Мобільна цифрова станція НВЧ діапазону подвійного призначення. *Наукові праці ОНАЗ ім. О.С.Попова*. 2014. № 2. С. 76-82.
5. Почерняев В.М., Повхліб В.С. Стан і напрямки розвитку мобільних цифрових радіорелейних систем. *Системи озброєння і військова техніка*. 2018. №1(53). С.183-188.
6. Почерняев В.М., Повхліб В.С. Стан і напрямки розвитку мобільних цифрових тропосферних систем зв'язку. *Системи озброєння і військова техніка*. 2018. №2(54). С.51-59.

References

1. J.G.Proakis. Digital communications. NY:McGraw-Hill, 1995. 800p.
2. Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Wiley-Interscience, 1993.
3. E. Jahnke, F. Emde, and F. Lösch, Tables of higher functions, McGraw-Hill, New York, 1960.
4. Pochernyaev V.M., Povkhlib V.S. Mobilna tsifrova stantsiya NVCh diapazonu podviinogo pryznachennya. *Naukovi pratsi ONAZ im. O.S.Popova*. 2014. № 2. S. 76-82.
5. Pochernyaev V.M., Povkhlib V.S. Stan i napryamki rozvitku mobilnikh tsifrovikh radiorelelnikh sistem. *Sistemi ozbroennya i viiskova tekhnika*. 2018. №1(53). S.183-188.
6. Pochernyaev V.M., Povkhlib V.S. Stan i napryamki rozvitku mobilnikh tsifrovikh troposfernikh sistem zv'yazku. *Sistemi ozbroennya i viiskova tekhnika*. 2018. №2(54). S.51-59.