

УДК 519.6, 539.3

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ СТАЦІОНАРНИХ SH-ХВИЛЬ З СИСТЕМОЮ КРИВОЛІНІЙНИХ ТРІЩИН У НАПІВПРОСТОРІ

DOI 10.36994 / 2788-5518-2023-01-05-09

Панченко Б.Є. Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Одеса, Україна.
pr-bob@ukr.net

Буката Л.М. Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Одеса, Україна.
ygrikhuda@gmail.com

Багачук Д.Г. Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, Одеса, Україна.
bagachukdg@gmail.com

Анотація: Запропоновано метод розв'язання задач математичної фізики для напівнескінчених середовищ, що містять системи криволінійних тріщин-розрізів. Більшість відомих робіт стосується проблем дифракції пружних хвиль на прямих і кругових розрізах. Однак насправді тріщина зазвичай не є прямою чи круглою. Дослідження показали, що кривизна тріщини істотно впливає на значення коефіцієнтів інтенсивності динамічних напружень. Значення цього параметра також залежить від близькості дефектів один до одного, оскільки вони завжди потрапляють в дію відбитої хвилі.

Напружено-деформований стан середовищ зі складними властивостями можна ефективно моделювати за допомогою обчислювальних комплексів у поєднанні з програмними системами. Більшість досліджень присвячено розвитку методу скінченних елементів. Проте метод інтегральних рівнянь дуже ефективний для розв'язання антиплоских задач теорії дифракції. Перевагою цього методу є зменшення кількості просторових змінних, висока швидкість збіжності та можливість використання різноманітних ефективних схем чисельної реалізації. Метод також надає можливість будувати ефективні схеми паралельних обчислень. Розроблено єдиний підхід до розв'язання задачі на основі сингулярних інтегральних рівнянь (CIP). Досліджено відповідні динамічні крайові задачі для защемленої та вільної від сил півплощини. Досліджено вплив кривизни дефекту, їх взаємодії та близькості межі на величину та характер коефіцієнтів інтенсивності динамічних напружень. Паралельні алгоритми дозволяють значно скоротити час обчислень і більш детально проаналізувати характеристики хвильового поля. Поєднання методу SIE призводить до значного підвищення ефективності запропонованого алгоритму. Метод може бути використаний для оцінки впливу різних механічних або геометричних факторів на міцність тіл з дефектами

Ключові слова: крайова задача, хвилі зсуву, сингулярні інтегральні рівняння, паралельні обчислення, система тріщин-розрізів.

MATHEMATICAL MODEL OF THE INTERACTION OF STATIONARY SH-WAVES WITH A SYSTEM OF CURVILINEAR CRACKS IN A HALF-SPACE

Borys Panchenko. State University intellectual technologies and communication, Odesa, Ukraine. pr-bob@ukr.net
Liudmyla Bukata. State University intellectual technologies and communication, Odesa, Ukraine. ygrikhuda@gmail.com
Denys Bahachuk. State University intellectual technologies and communication, Odesa, Ukraine.
bagachukdg@gmail.com

Abstract: A method for solving mathematical physics problems is proposed for semi-infinite media containing systems of curved crack-slits. Most of the studies known from the literature relate to the problems of diffraction of elastic waves on straight and circular cuts. However, in reality, the crack is usually not straight or circular. Studies have shown that the curvature of a crack significantly affects the value of the dynamic stress intensity coefficients. The value of this parameter also depends on the proximity of the defects to each other, since they always fall within the range of the reflected wave.

The stress-strain state of media with complex properties can be effectively modeled by computing complexes in combination with software systems. Most studies are devoted to the development of the finite element method. However, the method of integral equations is very effective for solving anti-planar problems of diffraction theory. The advantage of this method is the reduction in the number of spatial variables, the high speed of convergence, and the possibility of using various efficient numerical solution methods. The method also has the ability to build efficient parallel computing schemes.

A unified approach to solving the problem is developed on the basis of singular integral equations (SIEs). The corresponding dynamic boundary value problems for a clamped and force-free half-plane are investigated. The influence of the defect curvature, their interaction, and the proximity of the boundary on the magnitude and

nature of the dynamic stress intensity coefficients is studied. Parallel algorithms allow to significantly reduce the computation time and analyse the characteristics of the wave field in more detail. The combination of the SIE method, which reduces the dimensionality of the problem by one, and provides significant savings in computing time due to the parallelization of computational procedures, leads to a significant increase in the efficiency of the proposed algorithm. The method can be used to assess the influence of various mechanical or geometric factors on the strength of bodies with defects.

Keywords: boundary value problem, shear waves, singular integral equations, parallel computations, system of cracks-sections.

Вступ

Сучасні конструкції та споруди працюють в умовах не тільки статичних, а й динамічних навантажень. Відомо, що при динамічному навантаженні середовищ з тріщинами ймовірність розвитку цих дефектів суттєво підвищується. Тому з метою оцінки граничного стану таких середовищ важливо з'ясувати вплив інерційного ефекту поширення дефектів.

Дослідженню проблеми динамічного руйнування конструкцій має передувати аналіз хвильових полів у модельних задачах. У зв'язку з цим актуальною є розробка методів вирішення динамічних задач математичної фізики для нескінченних та напівнескінченних середовищ із тріщинами.

З теоретичної точки зору тріщина є математичним розрізом, при переході через який зміщення зазнають розривів. Якщо розриви зсувів заздалегідь невідомі, точний математичний опис хвильового поля, що виникає через наявність тріщини, виявляється дуже складним.

Більшість відомих з літератури досліджень належить до задач дифракції пружних хвиль на прямих та кругових тріщинах-розрізах. Проте насправді тріщина, зазвичай, немає прямолінійної чи кругової форми. І, як показали дослідження, кривизна дефекту істотно впливає на величину динамічних коефіцієнтів інтенсивності напружень. Значення цього параметра залежить також від близькості дефектів один до одного, оскільки вони завжди потрапляють в зону дії відбитої хвилі.

Ця робота присвячена розробці методу вирішення динамічних задач математичної фізики для ізотропного напівпростору, послабленого тунельними криволінійними розрізами. Розглядається стаціонарний хвильовий процес.

Напружено-деформований стан середовищ з ускладненими властивостями може ефективно моделюватись обчислювальними комплексами у поєднанні з програмними системами. Більшість досліджень присвячено розвитку методу скінченних елементів [1]. Проте для вирішення антиплоских задач теорії дифракції [5, 10] суттєву ефективність має метод інтегральних рівнянь [2, 6-9, 11-14]. Перевага цього методу полягає у скороченні числа просторових змінних, досить високій швидкості збіжності та можливості застосування різних ефективних чисельних методів розв'язання [8, 12]. Також метод має можливість побудови ефективних паралельних обчислювальних схем [7, 9].

Виконання досліджень

Розглянемо пружний ізотропний напівпростір, послаблений системою тунельних уздовж осі OZ криволінійних розрізів L_j ($j = \overline{1, K}$) (рис. 1.), де L_j - проста розімкнена дуга Ляпунова з початком у точці a_j і кінцем у точці b_j (припускаємо, що $L_j \cap L_j = \emptyset$).

Вважаємо, що береги розрізів вільні від сил, а переміщення при переході через $L = \cup L_j$ зазнають розриву.

Нехай із нескінченності випромінюється монохроматична хвиля зсуву, нормаль до фронту якої становить кут ψ з віссю OX (залежність від часу виражається множителем $e^{-i\omega t}$):

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_2(x \cos \psi + y \sin \psi)} \quad \tau = \text{const} \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2} \quad (1)$$

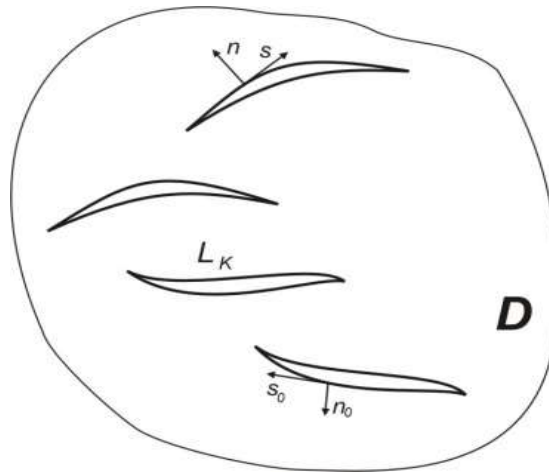


Рис. 1. Схема довільної системи розрізів у середовищі

Тут ω - частота коливань, c_2 - швидкість поширення поперечної хвилі.

В результаті взаємодії падаючої W_0 хвилі з розрізами виникає розсіяна хвиля переміщень W_1 , яка задовольняє рівнянню антиплоскої деформації [6,9]:

$$\Delta W_1 + \gamma_2^2 W_1 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2)$$

Для механіки руйнування вирішальне значення має асимптотичний розподіл напружень в околиці вершин дефектів [12]. Ненульові компоненти тензора напружень σ_{31}, σ_{32} є дотичні напруження у площині поперечного перерізу тріщин. Вони пов'язані з переміщенням $W = W_0 + W_1$ формулами (тут μ - модуль зсуву):

$$\sigma_{31} = \mu \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \sigma_{32} = \mu \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \sigma_{31} - i\sigma_{32} = 2\mu \frac{\partial W}{\partial z}, \quad z = x + iy. \quad (3)$$

Дотичне напруження σ_n , що діє на L у точці $\zeta = \xi + i\eta \in L$ з боку позитивної нормалі, дорівнює:

$$\sigma_n = \sigma_{31} \sin \varphi - \sigma_{32} \cos \varphi = \operatorname{Im} \left\{ e^{i\varphi} (\sigma_{31} - i\sigma_{32}) \right\}, \quad (4)$$

де φ - кут між позитивною дотичною до L у точці ζ і віссю OX.

При переході через L воно забезпечує стрибок переміщень $([W_1] = W_1^+ - W_1^- = f(s))$ і безперервність напружень $([\sigma_n] = \sigma_n^+ - \sigma_n^- = 0)$. Залишається виконати граничну умову на L :

$$\sigma_{n_0} = \mu \frac{\partial}{\partial n_0} (W_0 - W_1) = 0, \quad (5)$$

яке перепишемо у вигляді:

$$\left(e^{i\varphi_0} \frac{\partial W}{\partial z} - e^{-i\varphi_0} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \overline{z}} \right)^{\pm} = 0. \quad (6)$$

Розв'язання антиплоскої динамічної задачі математичної фізики зводиться до визначення функції $W_1(x, y)$ – рішення рівняння Гельмгольца (2) у площині із системою тріщин-розрізів при виконанні умов типу Зоммерфельда випромінювання на нескінченності [8].

Розглядається три варіанти нескінченного середовища: необмежений простір ($A=0$), напівпростір з границею $y=0$, вільною від сил ($A=-1$) та напівпростір із заземленою границею $y=0$ ($A=1$):

$$\begin{aligned} A=-1: \quad \sigma_y|_{y=0} &= \mu \frac{\partial W}{\partial y}|_{y=0} = 0; \\ A=1: \quad W|_{y=0} &= 0. \end{aligned}$$

Як і в [11], запишемо функцію $W_1(x, y)$, що характеризує розсіяну розрізами хвилю переміщень в області D , наступним чином:

$$\begin{aligned} W_1(x, y) = & \frac{1}{4} \int_L f(s) \left(\left[\frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) d\zeta - A \frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_1) \right] - \right. \\ & \left. - \left[\frac{\partial}{\partial \overline{z}} H_0^{(1)}(\gamma_2 r) d\overline{\zeta} - A \frac{\partial}{\partial \overline{z}} H_0^{(1)}(\gamma_1 r_1) \right] \right) + (\nu_0 - A \nu_0^-), \\ & r = |z - \zeta|, \quad r_1 = |z - \overline{\zeta}| \end{aligned} \quad (7)$$

Тут $H_n^{(1)}(x)$ - функція Ханкеля першого роду n -го порядку; $f(s)$ - невідома функція, що задовольняє на L умові Гельдера.

Інтегральне подання (7) автоматично задовольняє рівнянню Гельмгольца (2) в області D та умовам випромінювання на нескінченності.

Припустимо, що стрибки переміщень на кінцях розрізів L_j дорівнюють нулю, тобто:

$$f(a_j) = f(b_j) = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (8)$$

В інтегральній формі (8) можна записати у вигляді:

$$\int_L df(s) = \int_L f'(s) ds = 0. \quad (9)$$

Скористаємося відомими співвідношеннями [9]:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_0^{(1)}(\gamma r) = \frac{\gamma^2}{4} e^{-2i\alpha} H_2^{(1)}(\gamma r),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} H_0^{(1)}(\gamma r) = \frac{\gamma^2}{4} e^{2i\alpha} H_2^{(1)}(\gamma r), \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma^2}{4} H_2^{(1)}(\gamma r), \quad z - \zeta = r e^{i\alpha}.$$

Поведінка в нулі ($x \rightarrow 0$) функцій Ханкеля нульового та другого порядків характеризується асимптотичними формулами:

$$H_0^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi} \ln x + H_0(x), \quad H_2^{(1)}(x) = \frac{4}{i\pi x^2} + H_2(x), \quad (11)$$

де $H_0(x)$ и $H_2(x)$ - неперервні в точці $x = 0$.

Підстановка інтегрального подання (7) у вираз, що стоїть у лівій частині граничної умови (6), з урахуванням (10), (11) дає:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} \frac{\partial v_*}{\partial z} - e^{-i\varphi} \frac{\partial v_*}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{4} \int_L f(s) \left\{ \left[\left(e^{i(\varphi_0+\varphi)} \frac{\partial^2 H^{(1)}(\gamma r)}{\partial z^2} - e^{i(\varphi_0-\varphi)} \frac{\partial^2 H^{(1)}(\gamma r)}{\partial z \partial \bar{z}} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(e^{-i(\varphi_0-\varphi)} \frac{\partial^2 H^{(1)}(\gamma r)}{\partial z \partial \bar{z}} - e^{-i(\varphi_0+\varphi)} \frac{\partial^2 H^{(1)}(\gamma r)}{\partial \bar{z}^2} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - A \left[\left(e^{i(\varphi_0+\varphi)} \frac{\partial^2 H^{(1)}(\gamma r_1)}{\partial z \partial \bar{z}} - e^{i(\varphi_0-\varphi)} \frac{\partial^2 H^{(1)}(\gamma r_1)}{\partial z^2} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(e^{-i(\varphi_0-\varphi)} \frac{\partial^2 H^{(1)}(\gamma r_1)}{\partial \bar{z}^2} - e^{-i(\varphi_0+\varphi)} \frac{\partial^2 H^{(1)}(\gamma r_1)}{\partial z \partial \bar{z}} \right) \right] \right\} ds = \\ &= \frac{\gamma^2}{16} \int_L f(s) \left\{ \left[\left(e^{i(\varphi_0+\varphi-2\alpha)} + e^{i(\varphi_0-\varphi-2\alpha)} \right) H_2^{(1)}(\gamma r) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(e^{i(\varphi_0-\varphi)} + e^{-i(\varphi_0-\varphi)} \right) H_0^{(1)}(\gamma r) \right] + A \left[\left(e^{i(\varphi_0-\varphi-2\alpha_1)} + e^{-i(\varphi_0-\varphi-2\alpha_1)} \right) H_2^{(1)}(\gamma r_1) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(e^{i(\varphi_0+\varphi)} + e^{-i(\varphi_0+\varphi)} \right) H_0^{(1)}(\gamma r_1) \right] \right\} ds = \end{aligned} \quad (12)$$

Тут використано формули інтегрування частинами для гіперсингулярних інтегралів [2] за додаткових умов (9).

Залучення формул Сохоцького-Племеля [6] для обчислення граничних значень інтегралів типу Коші, що виникають при задоволенні граничної умови (6) з урахуванням співвідношень (1), (12), зводить розглянуту крайову задачу до сингулярного інтегро-диференціального рівняння $f(s)$ [11]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi} \int_L \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{i\varphi_0}}{\xi - \xi_0} \right\} df - \frac{\gamma^2}{4i\pi} \int_L f(s) \cos(\varphi_0 - \varphi) \ln r_0 ds + \\ &+ \frac{\gamma^2}{8} \int_L \left\{ f(s) \left[\cos(\varphi_0 + \varphi - 2\alpha_0) \left(H_2^{(1)}(\gamma r) - \frac{4}{i\pi \gamma^2 r_0^2} \right) + \cos(\varphi_0 - \varphi) \left(H_0^{(1)}(\gamma r_0) - \frac{2i}{\pi} \ln r_0 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + A \left[\cos(\varphi_0 - \varphi - 2\alpha_{10}) H_2^{(1)}(\gamma r_{10}) + \cos(\varphi_0 + \varphi) H_0^{(1)}(\gamma r_{10}) \right] \right\} ds = \\ &= \tau \gamma_2 \sin(\varphi_0 - \psi) e^{-i\gamma_2 (\xi_0 \cos \psi + \eta_0 \sin \psi)} \end{aligned} \quad (13)$$

Для однозначної розв'язності інтегро-диференціального рівняння (13) до нього слід додати додаткову умову (9).

Представимо контур L у параметричній формі. Для цього на кожному контурі $L_j (j = \overline{1, K})$ вибираємо локальну систему координат з урахуванням паралельного перенесення та повороту осей координат. З урахуванням цього на контурі L_j будемо мати:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_0'}{\zeta - \zeta_0} &= \frac{1}{\beta - \beta_0} + \left(\frac{\zeta_0'}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\beta - \beta_0} \right), \\ s' \ln|\zeta - \zeta_0| &= s'_0 \ln|\beta - \beta_0| + (s' \ln|\zeta - \zeta_0| - s'_0 \ln|\beta - \beta_0|), \\ \zeta &= \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1, \quad \zeta(-1) = a_j, \quad \zeta(+1) = b_j. \end{aligned} \quad (14)$$

Помножимо рівняння (13) на $s'(\beta_0)$ і виділимо в ньому ядро типу Коши та логарифмічне ядро наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_0'}{\zeta - \zeta_0} &= \frac{1}{\beta - \beta_0} + \left(\frac{\zeta_0'}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\beta - \beta_0} \right), \\ s' \ln|\zeta - \zeta_0| &= s'_0 \ln|\beta - \beta_0| + (s' \ln|\zeta - \zeta_0| - s'_0 \ln|\beta - \beta_0|). \end{aligned} \quad (15)$$

Тут, використовуючи правило Лопіталю, знаходимо:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} \left(\frac{\zeta_0'}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\beta - \beta_0} \right) &= -\frac{\zeta''(\beta_0)}{2\zeta'(\beta_0)}, \\ \lim_{\beta \rightarrow \beta_0} (s' \ln|\zeta - \zeta_0| - s'_0 \ln|\beta - \beta_0|) &= s'_0 \ln|\zeta'_0|. \end{aligned} \quad (16)$$

Тепер інтеграл з логарифмічним ядром інтегруємо частинами з урахуванням додаткової умови (9):

$$\int_{-1}^1 f(\beta) \ln|\beta - \beta_0| d\beta = -\int_{-1}^1 (\beta - \beta_0) (\ln|\beta - \beta_0| - 1) df(\beta). \quad (17)$$

Параметрична форма інтегрального рівняння набуває вигляду:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(\beta)}{\beta - \beta_0} d\beta + \frac{\gamma^2}{4i\pi} \operatorname{Re}(\zeta'_0 \zeta') \int_{-1}^1 (\beta - \beta_0) (\ln|\beta - \beta_0| - 1) f'(\beta) d\beta + \\ &+ \frac{\gamma^2}{8} \int_{-1}^1 f(\beta) \left\{ \left[\operatorname{Re} \left(\zeta'_0 \zeta' \frac{\overline{\zeta_0 - \zeta}}{\zeta_0 - \zeta} \right) H_2^{(1)}(\gamma r_0) - \frac{4}{i\pi \gamma^2 (\beta_0 - \beta)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\operatorname{Re}(\zeta'_0 \overline{\zeta'}) H_0^{(1)}(\gamma r_0) - \frac{2i}{\pi} \operatorname{Re}(\zeta'_0 \overline{\zeta'}) \ln|\beta - \beta_0| \right] + \right. \\ &\quad \left. + A \left[\operatorname{Re} \left(\zeta'_0 \overline{\zeta'} \frac{\overline{\zeta_0 - \zeta}}{\zeta_0 - \zeta} \right) H_2^{(1)}(\gamma r_{10}) - \operatorname{Re}(\zeta'_0 \overline{\zeta'}) H_0^{(1)}(\gamma r_{10}) \right] \right\} d\beta = \\ &= \tau \gamma \zeta'_0 (e^{-i\gamma \eta_0} + A e^{i\gamma \eta_0}) \end{aligned} \quad (18)$$

Запропонована процедура регуляризації інтеграла з логарифмічним ядром дозволяє звести розв'язання задачі до сингулярного інтегрального рівняння (СІУ) щодо функції $f'(\beta)$. Ядра інтегралів, що відповідають функції $f(\beta)$, неперервні. Єдине рішення отриманого сингулярного

інтегро-диференціального рівняння (18) з урахуванням додаткової умови (9) будемо отримувати в класі функцій, що мають кореневу особливість на кінцях розрізів [10]. Таким чином, маємо:

$$f'(\beta) = \frac{\Omega(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad f(\beta) = \int_{-1}^{\beta} f'(\beta) d\beta, \quad \beta = \cos \theta.$$

Представимо невідому функцію $\Omega(\beta)$ інтегрального рівняння (18) як сукупність функцій, $\Omega_j(\beta^j)$ визначених на контурах $L_j, j=\overline{1, K}$. Чисельна реалізація інтегрального рівняння (18) проводиться методом механічних квадратур [8]. Рівняння, що відповідає контуру L_j , задовольняється у вузлах Чебишева другого роду $\theta_m = \frac{\pi m}{n_j} \quad (m=\overline{1, n_j-1})$ і зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) [13] щодо значень функції $\Omega_j(\beta)$ у вузлах Чебишева першого роду $\theta_k = \frac{2k-1}{n_j} \pi \quad (k=\overline{1, n_j})$, де n_j - число точок дискретизації контуру L_j .

Для інтеграла типу Коші використовуємо квадратурну формулу:

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_j(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}(\beta-\beta_m)} d\beta \approx \frac{\pi}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\Omega_j(\beta_k)}{\beta_k - \beta_m}, \quad \beta_m = \cos \theta_m, \quad \beta_k = \cos \theta_k. \quad (19)$$

До інтегралу, що містить регулярне ядро $D(\beta_0, \beta)$ і має кореневу особливість, застосовуємо квадратурну формулу Гауса:

$$\int_{-1}^1 \frac{\Omega_j(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} D(\beta_m, \beta) d\beta \approx \frac{\pi}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} D(\beta_m, \beta_k) \Omega_j(\beta_k). \quad (20)$$

Щодо додаткової умови (9) маємо:

$$\sum_{k=1}^{n_j} \Omega_j(\beta_k) = 0. \quad (21)$$

Інтерполяційний багаточлен Лагранжа для функції $f_j(\beta)$ має вигляд [8]:

$$f_j(\beta) = \int_{-1}^{\beta} f'(\beta) d\beta \approx -\frac{2}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \Omega_j(\beta_k) \sum_{l=1}^{n_j-1} \frac{\cos l \theta_k \sin l \theta}{l}. \quad (22)$$

СЛАР щодо функцій $\Omega_j, j=\overline{1, K}$ набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^{n_j} A_{mk}^j \Omega_j(\beta_k) = N_m^j, \quad \sum_{k=1}^{n_j} \Omega_j(\beta_k) = 0, \quad (23)$$

$$A_{mk}^j = \frac{\pi}{n_j} \left\{ \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{\beta_k - \beta_m} + \frac{\gamma_2^2}{4i\pi} \operatorname{Re}(\zeta'_m \overline{\zeta'_m}) (\beta_k - \beta_m) (\ln|\beta_k - \beta_m| - 1) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_2^2}{8} \sum_{v=1}^{n_l} B_{mv} \sin \theta_v \left(-\frac{2}{n_j} \sum_{j=1}^{n_j-1} \frac{\cos l \theta_k \sin l \theta_v}{l} \right) \right\},$$

$$B_{mv} = \operatorname{Re} \left(\zeta'_m \zeta'_v \frac{\overline{\zeta_m} - \overline{\zeta_v}}{\zeta_m - \zeta_v} \right) H_2^{(1)}(\gamma |\zeta_m - \zeta_v|) - \frac{4}{i\pi \gamma^2 (\beta_v - \beta_m)^2} + \\ + \operatorname{Re} \left(\zeta'_m \overline{\zeta'_v} \right) H_0^{(1)}(\gamma |\zeta_m - \zeta_v|) - \frac{2i}{\pi} \operatorname{Re}(\zeta'_m \overline{\zeta'_m}) \ln|\beta_v - \beta_m| + \\ + A \left[\operatorname{Re} \left(\zeta'_m \overline{\zeta'_v} \frac{\overline{\zeta_m} - \overline{\zeta_v}}{\zeta_m - \zeta_v} \right) H_2^{(1)}(\gamma |\zeta_m - \overline{\zeta_v}|) + \operatorname{Re}(\zeta'_m \zeta'_v) H_0^{(1)}(\gamma |\zeta_m - \overline{\zeta_v}|) \right]$$

Таким чином, за чисельної реалізації СИУ (18), (9) задача зводиться до рішення СЛАР (23) з $N=n_1+n_2+\dots+n_k$ невідомими.

Проведено чисельне дослідження описаної задачі. З метою дослідження збіжності побудованого алгоритму розглянуто випадок нормального падіння хвилі зсуву на систему [7], що складається з параболічних тріщин, які по черзі розташовані в пружному напівпросторі на однаковій відстані один від одного і симетрично орієнтовані вздовж осі X (рис. 2). Однак число тріщин праворуч і ліворуч не є обов'язково рівним ($L_{-T} \neq L_K$)

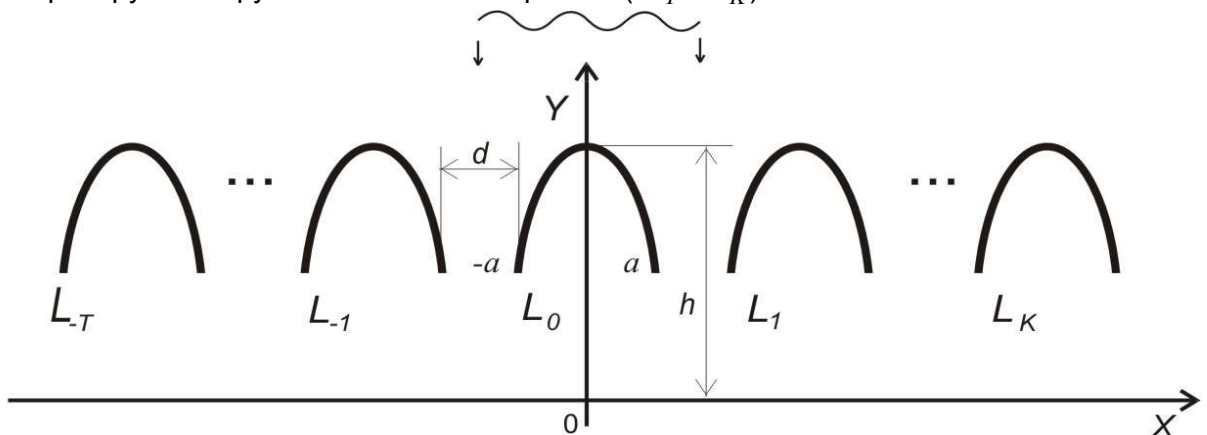


Рис. 2 Схема навантаження системи параболічних розрізів для обчислень

Елементи матриці СЛАР, до якої, зрештою, зводяться СИУ, є результатом дискретизації контурів. Очевидно, що розмір матриці пропорційний числу тріщин. Застосуємо розпаралелювання алгоритму, у якому кожен елемент матриці визначається координатами вузлів дискретизації. Як показано в [7], даний метод у обчислювальному сенсі зводиться до обходу кожного контуру по точках колокації позаінтегральної змінної ζ_{k0} і одночасному обходу кожного контуру за аналогічним чи іншим вузлом змінної інтегрування ζ_k .

Паралельно-конвеєрна схема обчислень побудована аналогічно [9]. Тут також обчислення мають такі етапи: синтез масивів вихідних даних, синтез матриці СЛАР, рішення СЛАР методом Гауса, синтез масивів підсумкових рішень. Перший, другий та четвертий етапи макроконвеєра не вимагають пересилання даних, що означає незалежність обчислень. На третьому етапі для реалізації СЛАР існує оптимальна кількість процесів, що визначається специфікою матриці. Це означає, що для 1, 2 та 4 етапів алгоритму оптимальним є число процесів, що відповідає числу коефіцієнтів СЛАР.

У цій методиці при розв'язанні крайової задачі основною операцією є визначення поточної відстані між точками колокації та інтегрування, заданої на безлічі значень параметричних координат неоднорідностей. Зазначена відстань є аргументом функції Гріна. І оскільки комбінації самих функцій Гріна та коефіцієнтів при них є елементами матриці СЛАР, зазначена процедура може бути базовою при розробці програми. Як показано в [7, 9], алгоритм добре масштабується по обчислювальних вузлах.

Обчислювальний процес рішення СЛАР розпаралелюється згідно [7,15]. Паралельне обчислення підсумкових шуканих характеристик здійснюється шляхом встановлення масивів значень невідомих функцій $f_k(\beta_p)$ в інтегральні подання рішень аналогічно процедурам формування матриці СЛАР. Для реалізації СЛАР ефективніше використовувати постстрокове розпаралелювання, коли пересилання та обчислення перебувають у балансі.

Уявимо контур L у параметричній формі:

$$\zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad -1 \leq \beta, \quad \beta_0 \leq 1, \quad \zeta(-1) = a_j, \quad \zeta(+1) = b_j. \quad (24)$$

Параметричне рівняння центральної параболи ставилося у вигляді:

$$x = p_1 \beta, \quad y = p_2 \beta^2 \quad (25)$$

Отже, на рис. 2 наведена конфігурація, де коефіцієнт кривизни параболи $p_2 = -0,5$

У роботі визначалися залежності величини коефіцієнту інтенсивності напружень (максимального напруження на продовженні L за вершину) від параметра q [11,13]:

$$q = 2l\gamma/\pi \quad (26)$$

$$K_3 = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\rho_0} \sigma_n^c = \frac{\mu}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\mp 1)}} |f_0(\mp 1)|. \quad (27)$$

Отже, проводились розрахунки безрозмірної величини:

$$\delta = \frac{\mu}{\sigma_{32}^{\max}} \frac{|\Omega(\mp 1)|}{2l}, \quad (28)$$

де $\sigma_{32}^{\max} = \mu\tau$ максимальне напруження в хвилі, що падає. Тут τ - амплітуда навантаження, γ - хвильове число, l - напівдовжина контуру, тобто, $L = 2l$.

Для перевірки достовірності алгоритму проведено два тести: віддалення трьох неоднорідностей на відстань 10^6 їх довжини один від одного та насичення системи [7,9] зі збільшенням числа геометрично рівних відбивачів у системі до 13-15. При віддаленні характеристики хвильового поля від кожного відбивача набуває значення відповідного поля від одного. Тому проводилося порівняння отриманих результатів із результатами, наведеними в [3,13]. Співпадіння результатів показало хорошу достовірність алгоритму.

У разі збільшення числа дефектів, розташованих паралельно фронту хвилі, що набігає, для більшості відбивачів характеристики співпадають із характеристиками результату розв'язання періодичної задачі. Відхилення значень виявляються лише для крайніх відбивачів.

Точність обчислень перевірялася шляхом порівняння результатів при різних значеннях N . Стабілізація значень до 10^{-10} досягається при 50 точках колокації кожного контуру. Збіжність алгоритму так само, як і в [7], не залежить від числа тріщин. Обумовленість матриць перевірялася згідно алгоритму, описаному в [15].

Рис. 3 ілюструє результати першого тесту. На рис. 3а наведено залежність коефіцієнта інтенсивності (28) - величини δ від $\mathcal{N}^2/4$ для будь-якої з трьох параболічних тріщин, відстань

між якими 10^6 їх довжини. Тут $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{\pi}{\gamma}$. Як і в роботі [13], криві 1, 2, 3 послідовно відповідають випадкам напівпросторів: 1 - із защемленою ($A=1$), 2 - вільною ($A=-1$) границею, а також 3 - нескінченного простору ($A=0$). Результати повністю співпадають. На рис. 3б наведено залежність, що співпадає з аналогічним результатом роботи [3] для випадку прямолінійної тріщини при $A=0$.

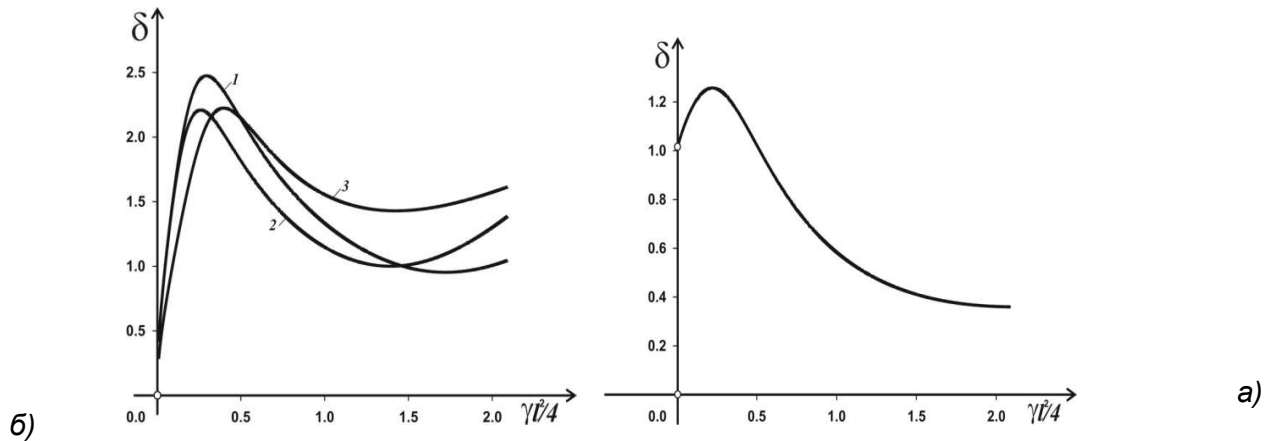
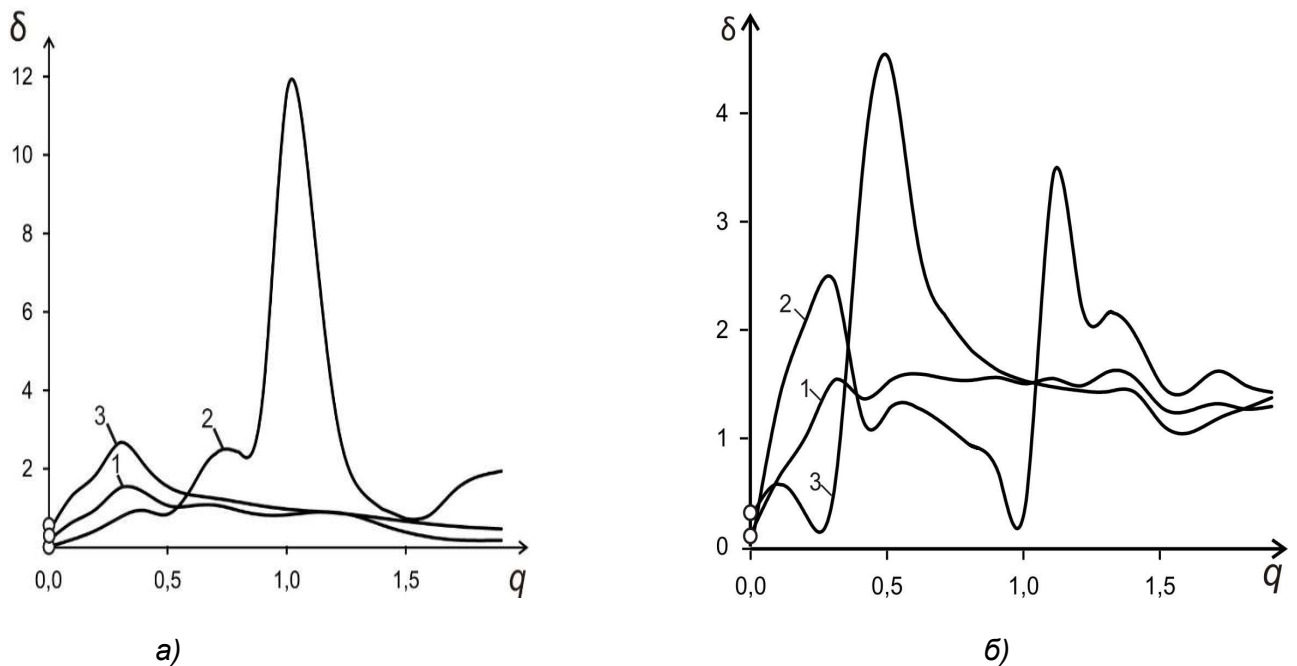


Рис. 3. Результати тестових обчислень

У цій роботі всі залежності наведено для центрального об'єкта. На рис. 4а наведено залежність коефіцієнта інтенсивності від параметра q згідно з формулою (26) [11,13]. Криві 1,2,3 послідовно відповідають випадкам: крива 1 - $A=0$, 2 - $A=-1$, 3 - $A=1$, коефіцієнт кривизни параболи $p_2 = 0,5$. У розрахунках використовувалося 9 об'єктів, параметри (рис. 2) $h=0,05$, $d=1$. На рис. 4б криві 1,2,3 також послідовно відповідають випадкам $A=0$, $A=-1$, $A=1$, $p_2 = 0,5$; 5 об'єктів, $h=2$, $d=1$.

Рис. 4. Розподіл коефіцієнта інтенсивності від параметра q

На рис. 5а криві 1,2,3 послідовно відповідають випадкам $A=0$, $A=-1$, $A=1$, $p_2 = 0,5$, 5 об'єктів, $h=6$, $d=1$. На рис. 5б для кривих 1,2,3 відповідно $A=0$, $A=-1$, $A=1$, $p_2 = 0,5$; 5 об'єктів, $h=10$, $d=1$.

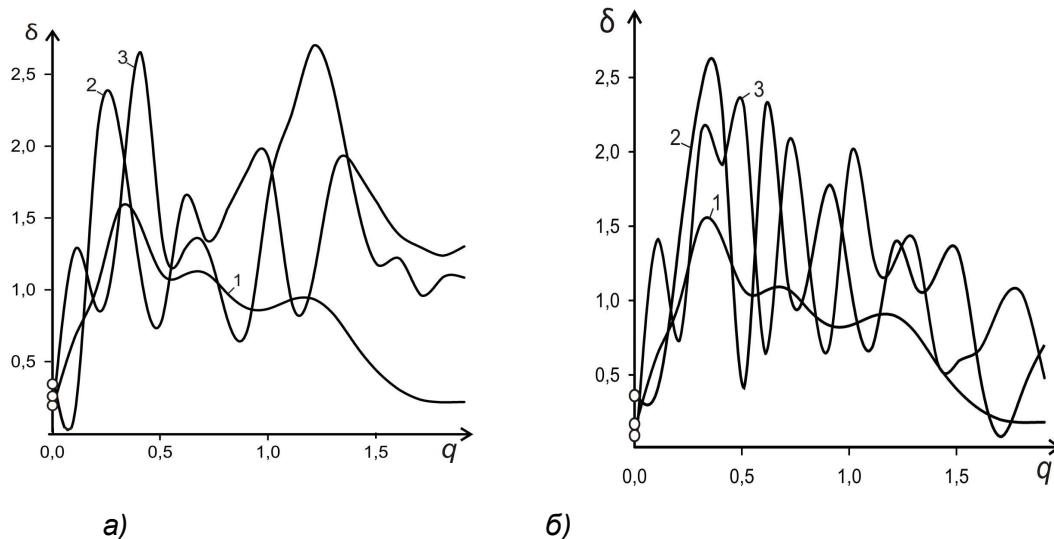


Рис.5. Розподіл коефіцієнта інтенсивності від параметра q

На рис. 5а криві 1,2,3 послідовно відповідають випадкам $A=0$, $A=-1$, $A=1$, $p_2 = 0,5$, 5 об'єктів, $h=6$, $d=1$. На рис. 5б для кривих 1,2,3 відповідно $A=0$, $A=-1$, $A=1$, $p_2 = 0,5$; 5 об'єктів, $h=10$, $d=1$.

Висновки

У задачі дифракції SH-хвилі на системі тріщин в ізотропному напівпросторі паралельні алгоритми дозволяють значно скоротити час обчислень та детальніше проаналізувати характеристики хвильового поля. Поєднання методу CIY, який знижує на одиницю розмірність задачі, та значна економія часу обчислень за рахунок розпаралелювання обчислювальних процедур призводить до суттєвого збільшення ефективності запропонованого алгоритму.

Література

1. Агапов В.П. Метод кінцевих елементів у статичі, динаміці та стійкості просторових тонкостінних підкріплених конструкцій / М: Вид. АСВ (Асоціації будівельних ВНЗ), 2000 - 152 с.
2. Білоцерківський С.М., Ліфанов І.К. Численні методи в сингулярних інтегральних рівняннях. - М: Наука, 1985. - 256 с.
3. Бородачов Н.М., Динамічна задача про тріщину у разі деформації поздовжнього зсуву// Проблеми міцності, № 4, 1973, с. 23-25
4. Вертгейм І.І., Терпугов В.М. Паралельні технології обчислень у механіці суцільних середовищ та МДТТ: Навчальний посібник / Перм: ПГУ, 2007. - 84 с.
5. Гузь О.М., Кубенко В.Д., Черевко М.О. Дифракція пружних хвиль/К: Наук. думка, 1978. - 307 с.
6. Мухелішвілі Н.І. Сингулярні інтегральні рівняння/М. Наука, 1968. - 512 с.
7. Назаренко О.М., Панченко Б.Є. Схема паралельних обчислень у задачах дифракції хвиль зсуву на системі отворів у нескінченному пружному середовищі // Проблеми програмування. - 2010. - № 2-3. - С. 604-610.
8. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярних інтегральних рівнянь у двовимірних задачах дифракції / К: Наук. думка, 1984. - 344 с.
9. Панченко Б.Є., Назаренко О.М. Каркасний аналіз предметної галузі: стаціонарні динамічні завдання теорії пружності для ізотропних середовищ із довільними неоднорідностями // Кібернетика та системний аналіз, 2013, - № 1, С. 172-187.
10. Селезов І.Т., Кривоніс Ю.Г., Яковлев В.В. Розсіяння хвиль локальними неоднорідностями в суцільних середовищах / К: Наук. думка, 1985. - 136 с.
11. Фільштинський Л.А. Динамічна завдання теорії пружності області з криволінійними розрізами (деформація поздовжнього зсуву) // Докл. АН СРСР, 1977-№6 - С. 1327-1330.

12. Фільштинський Л.А. Дифракція пружних хвиль на тріщинах, отворах, включення в ізотропному середовищі // Изв. АН СРСР. Механіка твердого тіла, 1991. - №4. - С. 119 -127.
13. Фільштинський Л.А., Взаємодія хвиль напруг з криволінійними тунельними розрізами поздовжнього зсуву в напівпросторі // Прикладна математика та механіка, Т. 46 № 3, 1982, с. 482-487
14. Фільштинський Л.А., Назаренко А.М., Взаємодія хвиль напруги з періодичною системою тріщин поздовжнього зсуву в напівпросторі// Акустичний журнал, Т. 29, вип. 3, 1983, с. 382-386
15. Хімич О.М., Полянко В.В. Ефективність двовимірних блочно-циклічних паралельних алгоритмів // Проблеми програмування. - 2008. - №3. - С. 145-149.

References

1. Agapov V.P. Metod kincevih elementiv u statiki, dinamici ta stijkosti prostорових tonkostinnih pidkriplenih konstrukcij / M: Vid. ASV (Asociaciya budivelnih VNZ), 2000 - 152 s.
2. Bilocerktivskij S.M., Lifanov I.K. Chislenni metodi v singulyarnih integralnih rivnyannya. - M: Nauka, 1985. - 256 s.
3. Borodachov N.M., Dinamichna zadacha pro trishinu u razi deformaciyi pozdovzhnogo zsuvu// Problemi micnosti, № 4, 1973, s. 23-25
4. Vertgejm I.I., Terpugov V.M. Paralelni tehnologiyi obchislen u mehanici sucilnih seredovish ta MDTT: Navchalnij posibnik / Perm: PGU, 2007. - 84 s.
5. Guz O.M., Kubenko V.D., Cherevko M.O. Difrakciya pruzhnih hvil/K: Nauk. dumka, 1978. - 307 s.
6. Mushelishvili N.I. Singulyarni integralni rivnyannya/M. Nauka, 1968. - 512 s.
7. Nazarenko O.M., Panchenko B.Ye. Shema paralelnih obchislen u zadachah difrakciyi hvil zsuvu na sistemi otvoriv u neskinchenomu pruzhnomu seredovishi // Problemi programuvannya. - 2010. - № 2-3. - S. 604-610.
8. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Nazarchuk Z.T. Metod singulyarnih integralnih rivnyan u dvovimirnih zadachah difrakciyi/K: Nauk. dumka, 1984. - 344 s.
9. Panchenko B.Ye., Nazarenko O.M. Karkasnij analiz predmetnoyi galuzi: stacionarni dinamichni zavdannya teorii pruzhnosti dlya izotropnih seredovish iz dovilnimi neodnorodnostyami // Kibernetika ta sistemnij analiz, 2013, - № 1, С. 172-187.
10. Selezov I.T., Krivonis Yu.G., Yakovlyev V.V. Rozsiyannya hvil lokalnimi neodnorodnostyami v sucilnih seredovishah/K: Nauk. dumka, 1985. - 136 s.
11. Filshtinskij L.A. Dinamichna zavdannya teorii pruzhnosti oblasti z krivolinijnimi rozrizami (deformaciya pozdovzhnogo zsuvu) // Dokl. AN SRSR, 1977-№6 - С. 1327-1330.
12. Filshtinskij L.A. Difrakciya pruzhnih hvil na trishinah, otvorah, vklyuchennya v izotropnomu seredovishi // Izv. AN SRSR. Mехanika tverdogo tila, 1991. - №4. - С. 119 -127.
13. Filshtinskij L.A., Vzeyemodiya hvil naprug z krivolinijnimi tunelnimi rozrizami pozdovzhnogo zsuvu v napivprostori // Prikladna matematika ta mehanika, Т. 46 № 3, 1982, s. 482-487
14. Filshtinskij L.A., Nazarenko A.M., Vzeyemodiya hvil naprug z periodichnoyu sistemoyu trishin pozdovzhnogo zsuvu v napivprostori// Akustichnij zhurnal, Т. 29, vip. 3, 1983, s. 382-386
15. Himich O.M., Polyanko V.V. Efektivnist dvovimirnih blochno-ciklichnih paralelnih algoritmiv // Problemi programuvannya. - 2008. - №3