

УДК 511

DOI <https://doi.org/10.36994/2788-5518-2023-02-06-08>

МНОЖИНА ЦІЛИХ ЧИСЕЛ З УНІКАЛЬНИМИ СУМАМИ ДВОХ ЕЛЕМЕНТІВ

Павленко О. Ю., Відкритий міжнародний університет розвитку людини «Україна»,
Інститут комп'ютерних технологій, Київ, Україна
<https://orcid.org/0000-0001-9690-5987>, asd97456@gmail.com

Тимошенко А. Г., канд. техн. наук, Відкритий міжнародний університет
розвитку людини «Україна», Інститут комп'ютерних технологій, Київ, Україна
<https://orcid.org/0000-0003-0954-3186>, timoshag@i.ua

Тимошенко О. М., канд. фіз.-мат. наук, Відкритий міжнародний університет
розвитку людини «Україна», Інститут комп'ютерних технологій, Київ, Україна
<https://orcid.org/0009-0003-4331-1706>, omtimoshenko@gmail.com

Анотація. Розглянуто задачу створення множини натуральних чисел з унікальними сумами будь-яких двох елементів. Як елементи можна використовувати натуральний ряд $(1, 2, 3, \dots, n)$, або починати з нуля $(0, 1, 2, \dots, n)$. У першому випадку під парними сумами розуміємо суму двох будь-яких елементів. Наприклад, для 4 елементів множини отриманий ряд $(1, 2, 3, 5)$ має такі всі можливі унікальні парні суми $(1 + 2 = 3; 1 + 3 = 4; 1 + 5 = 6; 2 + 3 = 5; 2 + 5 = 7; 3 + 5 = 8)$. У другому випадку кожен елемент ряду може розглядатися як парна сума з нулем. Тоді для 4 елементів множини $(0, 1, 2, 4)$ маємо всі можливі унікальні парні суми $(0 + 1 = 1; 0 + 2 = 2; 0 + 4 = 4; 1 + 2 = 3; 1 + 4 = 5; 2 + 4 = 6)$. Тобто в цьому випадку сума двох значущих елементів не повинна збігатися з жодним елементом множини й іншими парними сумами. На цих прикладах ми бачимо, що це різні задачі, і в роботі розглядається другий варіант.

Запропоновано алгоритм пошуку множини натуральних чисел за різних значень кількості елементів. Як критерії оптимальної побудови ряду використовується мінімум суми елементів і мінімальне значення останнього елемента. Наведено алгоритм і програма створення такого ряду. Отримано результат для 8 елементів множини. Програма написана алгоритмічною мовою програмування Python. Вона має компактний характер завдяки використанню бібліотеки *itertools*. Результати досліджень наведені в таблиці для різних значень кількості значущих елементів множини. Для найбільшої кількості елементів отримано кілька результатів. Це пов'язано з вибором рядів за двома критеріями. У наведених результатах досліджень ці критерії збігаються за кількості елементів $n < 8$. Для восьми елементів множини отримано різні набори натуральних чисел для кожного мінімального критерія.

Ключові слова: унікальні суми множини натуральних чисел, адитивно-різний ряд, парні суми.

SET OF INTEGERS WITH UNIQUE SUMS OF TWO ELEMENTS

Oleh Pavlenko, Institute Open International University of Human Development "Ukraine",
Kyiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0001-9690-5987>, asd97456@gmail.com

Anatolii Tymoshenko, Ph.D., Institute Open International University of Human Development "Ukraine",
Kyiv, Ukraine
<https://orcid.org/0000-0003-0954-3186>, timoshag@i.ua

Oksana Tymoshenko, Ph.D., Institute Open International University of Human Development "Ukraine",
Kyiv, Ukraine
<https://orcid.org/0009-0003-4331-1706>, omtimoshenko@gmail.com

Abstract. The problem of creating a set of natural numbers with unique sums of any two elements is considered. The elements can be taken from the natural series $(1, 2 \dots n)$ or start from zero $(0, 1, 2 \dots n)$. In the first case, even sums necessarily mean the sum of two elements. For example, for a set of 4 elements, the obtained series $(1, 2, 3, 5)$ has the following unique even sums $(1 + 2 = 3; 1 + 3 = 4; 1 + 5 = 6; 2 + 3 = 5; 2 + 5 = 7; 3 + 5 = 8)$. In the second case, each element of the series can be considered as an even sum with zero. Then, for a set of 4 elements $(0, 1, 2, 4)$, we have all possible unique even sums $(0 + 1 = 1; 0 + 2 = 2; 0 + 4 = 4; 1 + 2 = 3; 1 + 4 = 5; 2 + 4 = 6)$. Thus, in this case, the sum of two significant elements should not coincide with any element of the set or with other even sums. These examples illustrate that these are different problems, and the work focuses on the second variant. The proposed algorithm for finding a set of natural numbers for different

numbers of elements is discussed. The criteria for optimal series construction include the minimum sum of elements and the minimum value of the last element. The algorithm and program for creating such a series are provided. The obtained result is for 8 elements of the set. The program is written in the Python programming language using the *itertools* library, which makes it compact. The research results are presented in a table for various numbers of significant elements in the set. For the largest number of elements, several results are obtained, as the series are chosen based on two criteria. In the presented research results, these criteria coincide for numbers of elements $n < 8$. For eight elements of the set, different sets of natural numbers are obtained for each minimal criterion.

Key words: unique sums of natural numbers set, additive-different series, even sums.

Вступ

Під адитивно-різним рядом ми розуміємо множину натуральних чисел, у яких суми підмножин мають унікальні значення. Таку властивість має ряд A^k , де A – елементи натурального ряду і $A > 1$, а $k = 0, 1, 2, \dots, n$. Найпростіший ряд 2^n . Ця властивість випливає з того, що максимальний елемент ряду на одиницю більший за суму всіх попередніх елементів. Інколи виникає проблема побудови ряду, де максимальний елемент якомога менший. Уперше такий ряд був запропонований у роботі [1]. Більш досконалий ряд запропоновано в роботі [2]. Результати створення таких рядів наведені в таблиці 1. Там доведено неможливість вдосконалити побудову ряду з меншим максимальних елементом. Це було програмно підтверджено в роботі [3]. Використання абсолютно адитивно-різних чисел знайшло застосування у розв'язанні задачі комівояжера [4].

Крім ряду пошуку оптимального максимального елемента існують задачі пошуку ряду з унікальними сумами в заданій послідовності. Тут побудова ряду досягається перебором, оскільки неможливо використовувати попередній ряд. У роботі [5] було знайдено оптимальний ряд для 9 чисел. Побудова більшого ряду залишається відкритою задачею.

У роботі розглядається задача створення ряду адитивно-різних чисел з унікальними парними сумами.

Таблиця 1
Ряд абсолютно адитивно-різних чисел

n	Ряд абсолютно адитивно-різних чисел							max	Sum
1							1	1	1
2						1	2	2	3
3					2	3	4	4	9
4				3	5	6	7	7	21
5			6	9	11	12	13	13	51
6			11	17	20	22	23	24	117
7		20	31	37	40	42	43	44	257
8	40	60	71	77	80	82	83	84	577

Виділенні клітинки використовуються для побудови наступного ряду. Для цього використовується попередній ряд.

Пошук множини натуральних чисел з унікальними парними сумами

Тут маємо два критерії пошуку ряду. Ряд з мінімальним останнім елементом, або з мінімальною сумою всіх елементів ряду. За певної кількості елементів ці критерії можуть збігатися, тобто ми отримуємо ряд з мінімальним останнім елементом і найменшою сумою. В інших випадках одна послідовність має менший останній елемент, але більшу суму.

Варто визначити набір елементів множини ряду. Зазвичай ми використовуємо натуральний ряд або натуральний ряд і нуль. У другому випадку всі суми двох елементів не можуть збігатися з будь-яким елементом ряду. Ми розглядаємо другий випадок.

У роботі пропонується розв'язувати задачу за обома критеріями, тобто визначення мінімального останнього елемента та визначення мінімальної суми ряду.

Задаємо граничний діапазон чисел, у якому будемо визначати елементи ряду. З попередніх досліджень це значення для ряду до 7 чисел було вибрано діапазон 1...40. Збільшення діапазону суттєво впливає на час розрахунку.

З бібліотеки комбінаторики *itertools* використовується функція `combinations(iterable, [r])` – створення комбінації довжиною r з `iterable` без повторюваних елементів. Приклад `combinations('ABCD', 2) --> AB AC AD BC BD CD`

Алгоритм роботи програми

Вхідні змінні:

a – масив елементів;

$n = 8$ число елементів;

maxd – граничне значення діапазону елементів;

adsum – граничне значення межі сум ряду;

admax – останній елемент ряду.

Генерація масиву a:

a – масив від 1 до maxd.

Генеруються всі можливі комбінації рядів від 1 до 40 з довжиною n без повторюваних елементів.

Перевірка на унікальність сум

Знаходимо суми всіх комбінацій: масив елементів плюс масив сум комбінацій двох елементів. Об'єднуємо їх в один масив. Далі перевіряємо наявність у масиві однакових сум чисел.

if len(adetcheck) == len(set(adetcheck)),

len – довжина масиву,

set – видалення дублів в масиві.

Порівнюємо довжини двох масивів. Якщо довжини збігаються, тобто немає однакових сум, то це знайдений ряд, що має унікальні суми будь-яких двох чисел.

Також йде перевірка суми знайденого ряду із сумою попереднього ряду. З них залишаємо ряд із меншою сумою. Результат виводимо на екран.

Друга перевірка – перевірка на максимальний елемент знайденого ряду з аналогічним попереднього ряду, з яких залишаємо ряд із меншим останнім елементом. Результат також виводимо на екран.

Програма 1. Пошук адитивно-різних рядів з унікальними парними сумами.

```
%%time
```

```
import numpy as np
```

```
from itertools import *
```

```
a = []
```

```
n = 8
```

```
maxchislo = 41
```

```
adsum = 50000000
```

```
admax = 50000000
```

```
for r in range(1,maxchislo):
```

```
    a.append(r)
```

```
#Перевірка на адитивність. Суми одних чисел + суми двох чисел ряду.
```

```
for j in combinations(a, n):
```

```
    adetcheck = []
```

```
    adetcheck = [sum(i) for i in combinations(j, 1)] + [sum(i) for i in combinations(j, 2)]
```

```
#Перевірка адитивності ряду на співпадіння сум.
```

```
    if len(adetcheck) == len(set(adetcheck)) and sum(j)<=adsum:
```

```
        adsum=sum(j)
```

```
        # Вивід максимально-мінімального числа ряду за знайдену раніше
```

```
        print(j, ' suma= ',sum(j))
```

```
    if len(adetcheck) == len(set(adetcheck)) and max(j)<=admax:
```

```
        admax=max(j)
```

```
# Вивід мінімальної суми ряду за знайдену раніше
```

```
    print(j, ' max= ',max(j),' suma= ',sum(j))
```

Результати досліджень

Результати пошуку ряду

За допомогою програми проведені дослідження пошуку елементів ряду для кількості n = 1, 2, 3, ..., 8. Отримані результати наведені в таблиці 2.

Таблиця 2
Множини натуральних чисел від 1 до 8 елементів

n	Адитивно-різний ряд парних чисел								max	sum	time	maxd
1								1	1	1	0	40
2							1	2	2	3	3 ms	40
3						1	2	4	4	7	37.8 ms	40
4					1	2	4	7	7	14	385 ms	40
5				1	2	4	7	12	12	26	3.13 s	40
6			1	2	4	8	13	18	18	46	22.1 s	40
7		1	2	4	8	14	19	24	24	72	2 min 8 s	40
8	1	2	4	8	14	19	24	40	40	112	12 min 7 s	41
8	1	2	4	8	15	24	29	34	34	117	12 min 7 s	41

Примітки: n – кількість елементів ряду, max – максимальне значення ряду, sum – сума ряду, time – час виконання програми, maxd – граничне значення діапазону пошуку елементів.

Наведені результати роботи програми отримані на комп'ютері з такими параметрами:

Inter® Core™ i-7 2600 CPU @ 3,40GHz, ОЗУ 6 ГБ, Windows 10.

Висновки

На відміну від абсолютно адитивно-різних чисел, не існує простої формули побудови нового ряду на базі попереднього. Тому фактично ми ведемо пошук серед всіх можливих комбінацій. При цьому час пошуку для нового набору суттєво зростає. Із цієї причини ми отримали оптимальні результати для набору рядів до 8 елементів.

Отримані ряди дають змогу стверджувати, що результати носять оптимальний характер, тобто не існують менші суми набору елементів і менший максимальний елемент ряду.

Для пошуку рядів з більшою кількістю елементів потрібно використовувати інші алгоритми. Можливо, слід використати багатопроцесорні комплекси.

Література

1. Алоян Г. С., Тимошенко А. Г. Спосіб побудови ряду адитивно-різних чисел. Кібернетика. 1969. № 6. С. 64–66.
2. Тимошенко А. Г., Лузан К. О., Рогачова Т. В. Створення ряду цілих чисел з унікальними сумами елементів. Наукові записки НаУКМА. 2002. Том 20. Спеціальний випуск у двох частинах. Частина 2. С. 516–517.
3. Pavlenko O.Yu. Determination of the optimal sequence of additively distinct numbers., EUROPEAN SCIENTIFIC DISCUSSIONS. Proceedings of X International Scientific and Practical Conference Rome, Italy, 2021, August 15–17, p. 75–79.
4. Oleh Pavlenko, Anatolii Tymoshenko, Igor Melnyk, Andriy Luntovskyy et al. Searching Extreme Paths Based on Travelling Salesman's Problem for Wireless Emerging Networking, in Springer LNEE 965. Emerging Networking in the Digital Transformation Age: Approaches, Protocols, Platforms, Best Practices, and Energy Efficiency, by Springer LNEE 2023, issue 965, Springer Nature Cham, 24 p. (chapter #16).
5. Павленко О. Ю., Тимошенко А. Г., Бондаренко В. М. Алгоритм пошуку ряду послідовно адитивно-різних чисел. Вісник Університету «Україна» Інформатика обчислювальна техніка та кібернетика. 2017, № 1(18). С. 118–121.

References

1. Aloian, H.S., Timoshenko, A.H. (1969). Method of constructing a series of additively distinct numbers. Cybernetics. № 6. P. 64–66.
2. Timoshenko, A.H., Luzan, K.O., Rogachova, T.V. (2002). Creation of a series of integers with unique sums of elements. Scientific Notes of NaUKMA. Vol. 20. Special issue in two parts. Part 2. P. 516–517.
3. Pavlenko O.Yu. Determination of the optimal sequence of additively distinct numbers., EUROPEAN SCIENTIFIC DISCUSSIONS. Proceedings of X International Scientific and Practical Conference Rome, Italy, 2021, August 15–17, p. 75–79.
4. Pavlenko, O., Tymoshenko A., Melnyk I., Luntovskyy A. et al. Searching Extreme Paths Based on Travelling Salesman's Problem for Wireless Emerging Networking, in Springer LNEE 965. Emerging Networking in the Digital Transformation Age: Approaches, Protocols, Platforms, Best Practices, and Energy Efficiency, by Springer LNEE 2023, issue 965, Springer Nature Cham, 24 p. (chapter #16).
5. Pavlenko, O.Yu., Timoshenko, A.H., Bondarenko, V.M. (2017). Algorithm for searching a series of sequentially additively distinct numbers. Bulletin of the University "Ukraine" Computer Science and Cybernetics., № 1 (18). P. 118–121.