

КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 621.3.037.37

DOI: <https://doi.org/10.36994/2788-5518-2024-01-07-03>

ПЕРЕТВОРЕННЯ ДВІЙКОВИХ ЧИСЕЛ В БІНОМІАЛЬНІ

Борисенко О. А., д.т.н., проф., Сумський державний університет, Суми, Україна.

Хацько А. О., аспірант, Сумський державний університет, Суми, Україна. andrey5135vk@gmail.com

Анотація. У статті пропонується метод перетворення двійкових чисел у нерівномірні та рівномірні біноміальні числа за допомогою одночасного перебору: двійкові числа перебираються в бік зменшення, а біноміальні – у бік збільшення. Процес перебору триває доти, доки двійкове число не зменшиться до нуля. На цьому перебір завершується, і результатом є значення відповідного біноміального числа. Це перетворення є найпростішим з усіх відомих методів перетворення двійкових чисел у біноміальні. Воно також характеризується високою завадостійкістю та надійністю.

Для реалізації методу перебору використовуються відомі властивості біноміальних чисел, що забезпечують завадостійкість процесу. Завдяки цим властивостям перебірні алгоритми, представлені у статті, є найбільш простими та надійними. Недоліком методу є невисока швидкодія, однак вона компенсується тим, що для багатьох практичних застосувань ця швидкодія є достатньою, що робить алгоритми ефективними у таких випадках.

Ефективність методу зростає завдяки врахуванню завадостійкості процедур отримання рівномірних біноміальних чисел, які природно є завадостійкими. Біноміальні числа володіють властивістю самокорекції, що робить їх стійкими до різних видів шумів і помилок під час перетворення. Тому запропонований у статті метод може бути використаний у випадках, коли висока точність та надійність мають пріоритет перед швидкістю.

Зазначимо, що метод одночасного перебору дає змогу забезпечити стабільну роботу навіть в умовах підвищеного рівня завад, що важливо для багатьох технічних і наукових застосувань. Завдяки своїй простоті та завадостійкості алгоритмів вони можуть бути легко введені в різноманітні системи обробки даних, де потрібне перетворення двійкових чисел у біноміальні числа. Таким чином, наданий метод становить важливий інструмент у галузі цифрової обробки інформації, де простота й завадостійкість є критично важливими параметрами.

Важливо також відзначити, що на додаток до завадостійкості наданий метод перетворення має ще одну вагому перевагу – технологічність. Тому його реалізація з використання відповідних алгоритмів є важливим фактором для підвищення надійності цифрових систем під час їх розробки. Тому цей метод перетворення конкурентно спроможний порівняно з іншими методами перетворення двійкових чисел в біноміальні.

Ключові слова: двійкові числа, біноміальні числа, перебір, завадостійкість, біноміальні коефіцієнти.

CONVERSION OF BINARY NUMBERS INTO BINOMIAL NUMBERS

Oleksii Borysenko, D.Sc. (Tech.), Professor, Sumy State University, Sumy, Ukraine.

Andrii Khatsko, Ph.D Student, Sumy State University, Sumy, Ukraine. andrey5135vk@gmail.com

Abstract. The article proposes a method for converting binary numbers into non-uniform and uniform binomial numbers using simultaneous enumeration: binary numbers are enumerated in the decreasing direction, while binomial numbers are enumerated in the increasing direction. The enumeration process continues until the binary number is reduced to zero. At this point, the enumeration ends, and the result is the value of the corresponding binomial number. This conversion is the simplest of all known methods for converting binary numbers into binomial numbers. It is also characterized by high noise immunity and reliability.

The implementation of the enumeration method uses the well-known properties of binomial numbers, which ensure the noise immunity of the process. Thanks to these properties, the enumeration algorithms presented in the article are the simplest and most reliable. The drawback of the method is its low speed;

however, this is compensated by the fact that for many practical applications, this speed is sufficient, making the algorithms effective in such cases.

The efficiency of the method increases due to the consideration of the noise immunity of the procedures for obtaining uniform binomial numbers, which are naturally noise-immune. Binomial numbers have a self-correction property, making them resistant to various types of noise and errors during conversion. Therefore, the method proposed in the article can be used in cases where high accuracy and reliability take precedence over speed.

It should be noted that the simultaneous enumeration method ensures stable operation even under increased noise conditions, which is important for many technical and scientific applications. Due to the simplicity and noise immunity of the algorithms, they can be easily integrated into various data processing systems where the conversion of binary numbers into binomial numbers is required. Thus, the provided method constitutes an important tool in the field of digital information processing, where simplicity and noise immunity are critically important parameters.

It is also important to note that in addition to noise immunity, the given conversion method has another significant advantage its technological feasibility. Therefore, its implementation using the appropriate algorithms is an important factor in improving the reliability of digital systems during their development. Hence, this conversion method is competitive compared to other methods of converting binary numbers into binomial numbers.

Key words: binary numbers, binomial numbers, enumeration, noise immunity, binomial coefficients.

Вступ

Більшість сучасних цифрових систем обробки й передачі інформації будуються на основі двійкових чисел, які належать до природної двійкової системи числення. Вона найбільш проста, тому що має просту структуру з нульовою складністю. Однак двійкові числа самі по собі, без додаткового завадостійкого кодування, не дають змоги знаходити помилки в своїй роботі. Тому з'явилися більш складні позиційні системи числення – структурні системи зі складністю більшою за нуль, які вирішують задачу підняття завадостійкості цифрових систем. На сьогодні найбільш відомими структурними системами числення є факторіальні, біноміальні, фібоначієві, які генерують відповідно факторіальні, біноміальні і фібоначієві числа [1]. Останні найбільш відомі й до того ж і найбільш прості серед структурних чисел, що дає змогу ефективно виконувати над ними арифметичні операції. Факторіальна й біноміальна системи числення складніші, і тому їх числа мають більш високий рівень завадостійкості. Тож вони досить ефективно можуть використовуватися в спеціалізованих цифрових пристроях із метою підняття їх завадостійкості. Наприклад, за їх допомогою можна будувати завадостійкі кодувачі й декодувачі пристроїв систем передачі інформації.

Особливо важливе значення для побудови спеціалізованих пристроїв мають біноміальні системи числення, тому що вони можуть виконувати задачі на побудову складних комбінаторних об'єктів, що використовують сполуки, наприклад у вигляді рівноважних кодів, композицій тощо [1–4]. Однак у разі їх використання потрібні перетворювачі кодів із двійкових чисел у біноміальні і зворотно. Таке перетворення було запропоновано в роботах [1, 2]. Але воно досить складне для програмної і особливо апаратної реалізації, що знижує завадостійкість перетворення. Тому на практиці використовують хоча і менш швидкодіючі перетворювачі кодів, але більш прості, які базуються на переборі комбінацій [1, 2].

Постановка задачі

Є дві задачі перетворення, пов'язані з біноміальними числами, які можуть ефективно використовувати для свого рішення переборні алгоритми, досягаючи при цьому більшої простоти й надійності. З одного боку, це задача перетворення двійкових чисел у біноміальні, а з іншого – біноміальних чисел у двійкові. У цій роботі розглядається перша задача, тому що вона більш складна, чим зворотна, і в ній є більша практична потреба. Тим паче, що не завжди після перетворення двійкових чисел у біноміальні, особливо в системах автоматики, виникає зворотна задача перетворення біноміальних чисел у двійкові.

Отже, завданням цієї роботи є розробка переборного алгоритму перетворення біноміальних чисел у двійкові.

Поняття біноміальних чисел. Існує багато різновидів біноміальних чисел [1]. У цій роботі розглядаються найбільш прості двійкові біноміальні числа

Двійковими біноміальними числами називаються послідовності розрядів цифр 0 і 1, з вагами у вигляді біноміальних коефіцієнтів, які дають змогу перетворювати їх в номери природних чисел і зворотно.

Нерівномірні біноміальні числа. Існують нерівномірні й отримані на їх основі рівномірні біноміальні числа [1]. Нерівномірним біноміальним числом називається число з двійковим алфавітом довжини n , у якому кількість одиниць не перевищує значення k , а кількість нулів $n - k$ [1]. Вони мають різну довжину і тому можуть ефективно використовуватися для зберігання й передачі інформації. У цьому випадку біноміальні числа меншої довжини кодують більш імовірні повідомлення, а довші –

менш ймовірні. Іншою їх задачею є те, що вони створюють рівномірні біноміальні числа, які можуть використовуватися для побудови завадостійких цифрових пристроїв [1].

Діапазон нерівномірних і відповідно рівномірних біноміальних чисел визначається біноміальним коефіцієнтом

$$P = C_{n+1}^k = C_{n+1}^{n-k} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \quad (1)$$

У табл. 1 наведені величини діапазонів P нерівномірних біноміальних чисел для $n = 1, 2, \dots, 20$ і $k = 2$.

Таблиця 1
Діапазони біноміальних чисел P

n	P	n	P	n	P	n	P
1	1	6	21	11	66	16	136
2	3	7	28	12	78	17	153
3	6	8	36	13	91	18	171
4	10	9	45	14	105	19	190
5	15	10	55	15	120	20	210

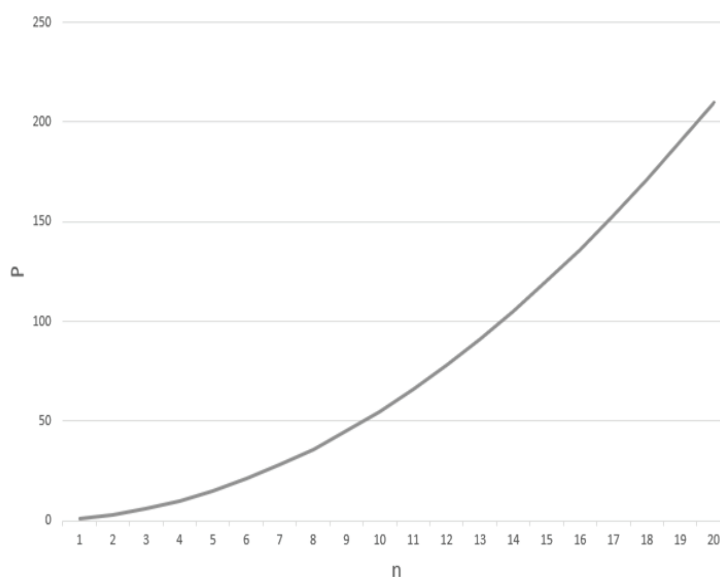


Рис. 1. Графік величин діапазонів біноміальних чисел P

Алгоритм побудови нерівномірних біноміальних чисел у зростаючому порядку з будь-якого біноміального числа має такі кроки:

1. В останній розряд справа нерівномірного біноміального числа, у якому стоїть 0, записується 1 і підраховується кількість одиниць у ньому.

2. Якщо кількість одиниць у біноміальному числі менша за k , то справа від отриманої одиниці записується нуль і далі відбувається повернення до кроку 1.

3. Якщо кількість одиниць у біноміальному числі дорівнює k , а нулів перед ними немає, то кінець.

4. Якщо кількість одиниць у біноміальному числі дорівнюватиме k і перед останніми з них буде стояти хоча б один нуль, то цей 0 повинен бути замінений на 1, а у молодші відносно нього справа розряди записуються нулі доти, доки їх кількість у числі не стане дорівнювати $n - k$.

5. Повернення до кроку 1.

У табл. 2 для $n = 4$ наведені 10 можливих нерівномірних біноміальних чисел зліва з кількістю одиниць $k = 3$, а справа з $k = 2$.

Рівномірні біноміальні числа. Крім нерівномірних біноміальних чисел, для побудови біноміальних цифрових пристроїв використовуються рівномірні біноміальні числа. Вони, на відміну від нерівномірних чисел, мають постійну довжину (див. табл. 3), яка містить n розрядів. Їх особливістю є те, що кількість нулів в них перед останньою одиницею справа не може бути більшою за $n - k$, що при-

зводить до їх завадостійкості [1]. Тобто побудовані на основі рівномірних біноміальних чисел цифрові пристрої чи програми будуть завадостійкі.

Таблиця 2
Нерівномірні біноміальні числа з $n = 4$ і $k = 3, 2$

№	Бін. числа	№	Бін. числа	№	Бін. числа	№	Бін. числа
0	00	5	1010	0	000	5	011
1	010	6	1011	1	0010	6	1000
2	0110	7	1100	2	0011	7	1001
3	0111	8	1101	3	0100	8	101
4	100	9	111	4	0101	9	11

Для побудови рівномірних біноміальних чисел нерівномірні біноміальні числа доповнюються справа нулями до довжини n відповідно до наступного алгоритму:

Формується нерівномірне біноміальне число

1. Знаходиться кількість розрядів у числі. Якщо воно дорівнює

$n - 1$, то рівномірне біноміальне число отримане.

2. Якщо кількість розрядів у нерівномірному біноміальному числі менше за $n - 1$, то в молодші розряди, які доповнюють біноміальне число до $n - 1$ розрядів, дописуються нулі.

У табл. 3 надані рівномірні біноміальні числа з $n = 4$ і $k = 3, 2$, які отримані відповідно до наданого вище алгоритму.

Таблиця 3
Рівномірні біноміальні числа з $n = 4$ і $k = 3, 2$

№	Бін. числа, $k = 3$	№	Бін. числа, $k = 3$	№	Бін. числа, $k = 2$	№	Бін. числа, $k = 2$
0	0000	5	1010	0	0000	5	0110
1	0100	6	1011	1	0010	6	1000
2	0110	7	1100	2	0011	7	1001
3	0111	8	1101	3	0100	8	1010
4	1000	9	1110	4	0101	9	1100

Завадостійкість рівномірних біноміальних чисел створює їх надлишковість, яка може бути абсолютною і відносною. Остання характеризує долю (імовірність) знаходження помилок у числах. Абсолютна надлишковість рівномірних біноміальних чисел:

$$N = 2^n - P = 2^n - C_{n+1}^k, \quad (2)$$

а відносна, яка характеризує долю (імовірність) знаходження в них помилок,

$$D = \frac{N}{2^n} = \frac{2^n - C_{n+1}^k}{2^n} = 1 - \frac{C_{n+1}^k}{2^n}. \quad (3)$$

У табл. 4 і 5 наведені абсолютна N і відносна D надлишковість рівномірних біноміальних чисел в бітах з $n = 1, 2, \dots, 20$ і $k = 2$. Відповідно на рисунках 2 і 3 наведені розподіли значень N та D залежно від значення n .

Таблиця 4
Абсолютна N надлишковість рівномірних біноміальних чисел з $n = 1, 2, \dots, 20$ і $k = 2$

n	N	n	N	n	N	n	N
1	-	6	43	11	1982	16	65400
2	-	7	100	12	4018	17	130919
3	2	8	220	13	8101	18	261973
4	6	9	467	14	16279	19	524098
5	17	10	969	15	32648	20	1048366

Методи перетворення двійкових чисел у біноміальні. На практиці для використання біноміальних чисел потрібні перетворювачі двійкових чисел у біноміальні, тому що цифрові системи працюють здебільшого з двійковими числами. Загальний вигляд процесу перетворення двійкового числа в біноміальне число показано на рис. 4.

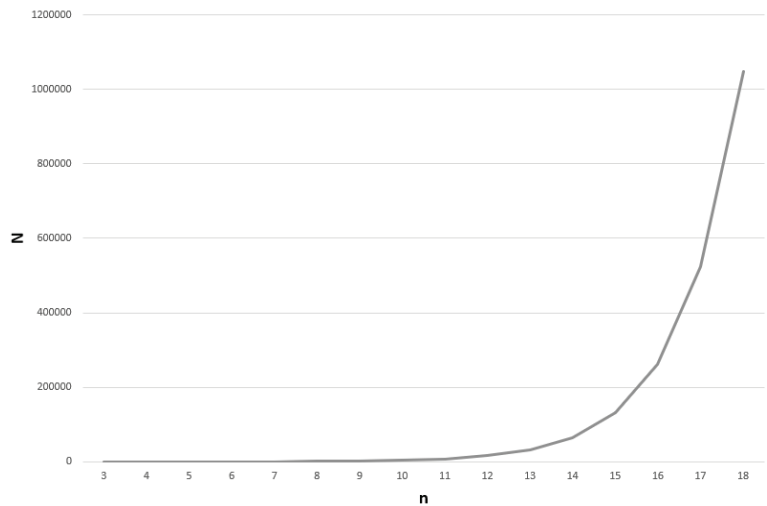


Рис. 2. Графік абсолютної N надлишковості рівномірних біноміальних чисел з $n = 1, 2, \dots, 20$ і $k = 2$

Таблиця 5
Відносна D надлишковість рівномірних біноміальних чисел з $n = 1, 2, \dots, 20$ і $k = 2$

n	D	n	D	n	D	n	D
1	–	6	0,671875	11	0,967773438	16	0,997924805
2	–	7	0,78125	12	0,980957031	17	0,998832703
3	0,25	8	0,859375	13	0,988891602	18	0,999347687
4	0,375	9	0,912109375	14	0,993591309	19	0,999637604
5	0,53125	10	0,946289063	15	0,996337891	20	0,999799728

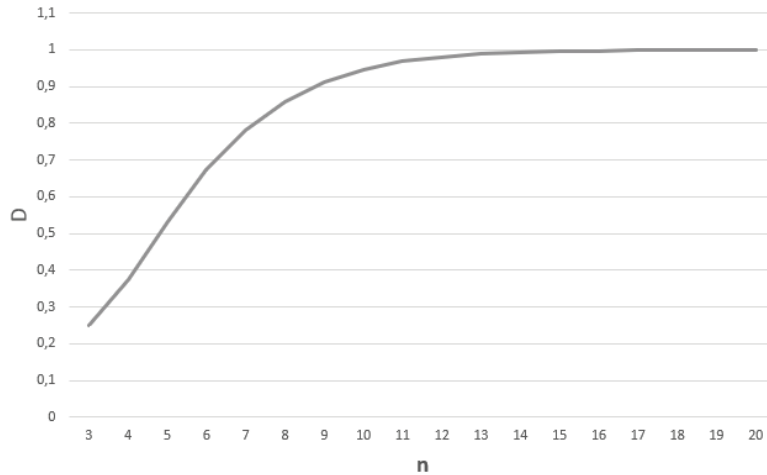


Рис. 3. Графік відносної D надлишковості рівномірних біноміальних чисел з $n = 1, 2, \dots, 20$ і $k = 2$

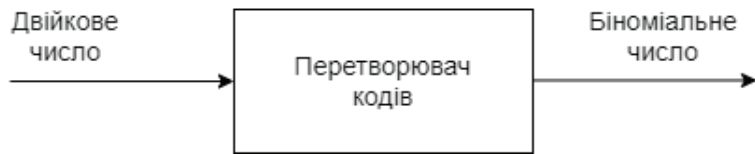


Рис. 4. Перетворення двійкових чисел у біноміальні

У ньому двійкове число подається на перетворювач кодів, який залежно від вибраного алгоритму з тою чи іншою швидкістю перетворює його в біноміальне число [2]. Найбільш швидкодіючий буде табличний метод перетворення, за якого в пам'яті перетворювача знаходиться готовий результат, а вхідне двійкове число виступає як його адреса, отже, за цією адресою знаходиться біноміальне число. [2]. Недолік цього алгоритму – це необхідність великої ємності пам'яті й обмеженість кількості біноміальних чисел, які можуть в ній зберігатися.

Менш швидкодіючим алгоритмом, який у багатьох випадках має достатню швидкість і не потребує великої ємності пам'яті, буде алгоритм наданий в [2]. Його особливість – це використання числової функції для біноміальних чисел [2]. Однак він досить складний для практичної реалізації, особливо в схемному вигляді.

Найменш швидкодіючим, але найбільш простим і надійним буде переборний алгоритм, який використовує програмно чи апаратно реалізований двійковий лічильник, що віднімає одиниці, відповідний йому біноміальний лічильник, який підсумовує одиниці, і схему порівняння числа, яке знаходиться в двійковому лічильнику, з нулем.

Вона працює таким чином. Програмно чи апаратно реалізований двійковий лічильник послідовно зменшує двійкові числа, і синхронно з ним, починаючи з 0, збільшує біноміальні числа підсумовуючий біноміальний лічильник. Він зупиняється тоді, коли двійковий лічильник переходить у нульовий стан і схема порівняння видає відповідний сигнал. У цей момент часу стан біноміального лічильника покаже результат перетворення двійкового числа.

Швидкість перетворення двійкового числа в біноміальне число залежить від кількості тактів 1, 2, ..., C_{n+1}^k , що призводить до потрібного результату. Середнє значення цієї кількості тактів знаходиться за формулою:

$$S = \frac{C_{n+1}^k + 1}{2}. \quad (4)$$

Виходить, що сума ряду, яка складається з C_{n+1}^k цілих чисел

1, 2, ..., C_{n+1}^k , знаходиться з виразу $C_{n+1}^k (C_{n+1}^k + 1)/2$. Якщо поділити цей вираз на C_{n+1}^k , отримаємо (4).

Наприклад, для $n = 4$ і $k = 2$ $S = \frac{10+1}{2} = 5,5$.

У табл. 6 наведені значення S для $n = 1, 2, \dots, 20$ і $k = 2$.

Таблиця 6
Середнє значення S для $n = 1, 2, \dots, 20$ і $k = 2$

n	S	n	S	n	S	n	S
1	1	6	11	11	33,5	16	68,5
2	2	7	14,5	12	39,5	17	77
3	3,5	8	18,5	13	46	18	86
4	5,5	9	23	14	53	19	95,5
5	8	10	28	15	60,5	20	105,5

Висновки

Таким чином, надані в цій статті переборні алгоритми побудови нерівномірних і рівномірних біноміальних чисел, які перетворюють двійкові числа в біноміальні, є найбільш простими й надійними. Їх недолік, мала швидкість, компенсується тим, що для багатьох практичних випадків ця швидкість достатня, і тоді вони будуть для них найбільш ефективними. Ефективність перетворення зростає з урахуванням завадостійкості процедур отримання рівномірних біноміальних чисел, які є завадостійкими за своєю природою.

Література

1. Борисенко О. А. Дискретна математика : підручник. Суми, 2019. 255 с.
2. Бардачов Ю., Соколова Н., Ходаков В. Дискретна математика. Київ : Вища шк., 2002. 287 с.
3. Бондаренко М., Білоус Н., Руткас А. Комп'ютерна дискретна математика. Компанія СМІТ, 2004. 480 с.
4. Капітонова Ю., Кривий С., Летичевський О. Основи дискретної математики. Наук. думка, 2002. 580 с.

References

1. Borysenko, O.A. (2019). Diskretnaya matematika [Discrete Mathematics]. Sumy [in Ukrainian].
2. Bardachov, Yu., Sokolova, N., Khodakov, V. (2002). Diskretnaya matematika [Discrete Mathematics]. Kyiv: Vyshcha Shkola [in Ukrainian].
3. Bondarenko, M., Bilous, N., Rutkas, A. (2004). Kompyuternaya obrabotka matematiki [Computer Discrete Mathematics] [in Ukrainian].
4. Kapitonova, Yu., Kryvyi, S., Letychevskiy, O. (2002). Osnovy detalnoy matematiki [Fundamentals of Discrete Mathematics] [in Ukrainian].