

КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 519.85

DOI <https://doi.org/10.36994/2788-5518-2024-02-08-03>

ЗАДАЧІ СТОХАСТИЧНОЇ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ: ОГЛЯД ОСТАННІХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Барболіна Т. М., д.ф.-м.н., доц., Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, Полтава, Україна. <https://orcid.org/0000-0002-4596-7907>, tm-b@gsuite.pnpu.edu.ua

Баранник Т. А., к.ф.-м.н., доц., Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, Полтава, Україна. <https://orcid.org/0009-0003-0509-9935>, barannykt@gmail.com

Кононович Т. О., к.ф.-м.н., доц., Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, Полтава, Україна. <https://orcid.org/0000-0002-8755-9020>, ptkm@ukr.net

Подошвелєв Ю. Г., к.ф.-м.н., доц., Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, Полтава, Україна. <https://orcid.org/0000-0002-3394-2809>, optimist1618@outlook.com

Анотація. Стаття присвячена огляду результатів останніх років у галузі стохастичної комбінаторної оптимізації. Формулювання задач в умовах невизначеності, у тому числі ймовірнісної, вимагає уточнення поняття екстремуму. У роботах вітчизняних науковців запропоновано різні підходи до постановок задач комбінаторної оптимізації зі стохастичною невизначеністю. Один із підходів пропонується для досить широкого класу оптимізаційних задач і розуміє невизначеність як неоднозначність коефіцієнтів функціонала оптимізації. Пропонуються компромісні критерії, обґрунтовано алгоритми побудови компромісних розв'язків як для загальної постановки оптимізаційної задачі, так і для окремих класів задач (транспортна задача, задача дробово-лінійного програмування, задача календарного планування). Інший підхід до формалізації задач з імовірнісною невизначеністю ґрунтується на введенні відношення порядку на множині випадкових величин і допускає, що випадковими величинами можуть бути як коефіцієнти цільової функції, так і компоненти розв'язку. Досліджується розв'язування задач у такій постановці на загальній множині розміщень. Для задач з лінійною цільовою функцією без додаткових обмежень встановлено ряд властивостей екстремалі, які дозволяють зменшувати вимірність задачі, що розв'язується. Для задач з лінійною цільовою функцією і додатковими обмеженнями запропоновано алгоритм у рамках методології гілок і меж. Дослідження також проводяться і в напрямі врахування стохастичної невизначеності під час формулювання окремих класів оптимізаційних задач, зокрема задачі комівояжера або плану формування поїздів. Автори робіт розглядають задачі, у яких окремі параметри є нормально розподіленими випадковими величинами, та пропонують обчислювальні схеми для розв'язування сформульованих задач.

Ключові слова: комбінаторна оптимізація, стохастична оптимізація, задачі оптимізації на розміщеннях, задача комівояжера, компромісний критерій.

STOCHASTIC COMBINATORIAL PROBLEMS: A REVIEW OF LATEST RESULTS

Tetiana Barbolina, Dr. habil., Ass. Prof., Poltava V. G. Korolenko National Pedagogical University, Poltava, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-4596-7907>, tm-b@gsuite.pnpu.edu.ua

Tetiana Barannyk, Ph.D., Ass. Prof., Poltava V. G. Korolenko National Pedagogical University, Poltava, Ukraine. <https://orcid.org/0009-0003-0509-9935>, barannykt@gmail.com

Tetiana Kononovych, Ph.D., Ass. Prof., Poltava V. G. Korolenko National Pedagogical University, Poltava, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-8755-9020>, ptkm@ukr.net

Yurii Podoshvelev, Ph.D., Ass. Prof., Poltava V. G. Korolenko National Pedagogical University, Poltava, Ukraine. <https://orcid.org/0000-0002-3394-2809>, optimist1618@outlook.com

Abstract. The article is dedicated to reviewing recent results in the field of stochastic combinatorial optimization. The formulation of problems under uncertainty, including probabilistic uncertainty, requires a refinement of the concept of extremum. Domestic researchers have proposed various approaches to the formulation of combinatorial optimization problems under stochastic uncertainty. One of the approaches is proposed for a quite general class of optimization problems and interprets uncertainty as ambiguity in the

coefficients of the optimization functional. Compromise criteria are proposed, and algorithms for constructing compromise solutions are substantiated, for the general formulation of the optimization problem as well as for specific classes of problems (such as the transportation problem, fractional-linear programming problem, and scheduling problem).

Another approach to the formalization of problems with probabilistic uncertainty is based on the introduction of an order relation on the set of random variables and assumes that the random variables can represent the coefficients of the objective function as well as the components of the solution. They investigate solving of problems on the general set of arrangements in such formulation. For problems with a linear objective function without additional constraints, a number of properties of extremal have been established. These properties allow to reduce the problem's dimension. For problems with a linear objective function and additional constraints, they propose the algorithm within the framework of the branch-and-bound methodology.

Research is also being conducted in the direction of accounting for stochastic uncertainty in the formulation of specific classes of optimization problems, such as the traveling salesman problem or train formation scheduling. The authors consider problems where certain parameters are normally distributed random variables and propose computational schemes for solving the formulated problems.

Key words: combinatorial optimization, stochastic optimization, optimization problems on arrangements, travelling salesman problem, compromise criteria.

Вступ

Оптимізаційні задачі різної природи привертають увагу багатьох дослідників у усьому світі. Важливим класом таких задач є задачі оптимізації з обмеженнями комбінаторного характеру, які мають численні застосування у різних галузях людської діяльності. Сучасні потреби моделювання вимагають також врахування у постановках задач невизначеностей вхідних даних. Досить широка бібліографія присвячена задачам з інтервальною, нечіткою невизначеністю, багатокритеріальних задач тощо. Актуальним напрямом досліджень також є розв'язування задач стохастичної комбінаторної оптимізації (див., наприклад, [1–4]).

Ця стаття присвячена огляду отриманих в останнє десятиліття результатів вітчизняних досліджень задач комбінаторної оптимізації з імовірнісною невизначеністю.

Виконання досліджень

Досить загальний клас задач комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності введено О. А. Павловим в [5]. Автором розглядаються задачі в такій постановці:

$$\min_{\sigma \in \Omega} \sum_{i=1}^s \omega_i k_i(\sigma),$$

де Ω – множина допустимих розв'язків, ω_i – числа, $k_i(\sigma)$ – i -та числова характеристика допустимого розв'язку σ . Вважається, що сформульована задача має ефективний алгоритм розв'язування, який не може бути застосований у випадку зміни структури множини Ω .

Під невизначеністю у цій постановці розуміється невизначеність значень коефіцієнтів ω_i ; існують набори значень ваг $\{\omega_i^l, i = 1, \dots, s\}$, $l = 1, \dots, L$, кожен з яких може бути набором коефіцієнтів задачі на етапі реалізації її розв'язку. У випадку імовірнісної невизначеності задаються додатні ймовірності для кожного можливого набору значень ваг.

$$\min_{\sigma \in \Omega} \sum_{i=1}^s \left(\sum_{l=1}^L a_l \omega_i^l \right) k_i(\sigma). \quad (1)$$

Ідеї, запропоновані в [5], знайшли розвиток у наступних роботах О. А. Павлова та його учнів. Так, робота [6] присвячена питанням знаходження експертних вагових коефіцієнтів, використання яких передбачено окремими критеріями компромісних рішень. На основі попередніх робіт автора та його учнів сформульований алгоритм, який містить ефективну процедуру визначення експертних вагових коефіцієнтів на основі емпіричних матриць попарних порівнянь.

У роботах [7–10] та інших застосовано запропонований у [5] підхід до формалізації та розв'язування в умовах невизначеності окремих класів оптимізаційних задач. Зокрема, у [7] представлено розв'язування транспортної задачі як задачі комбінаторної оптимізації в умовах невизначеності вигляду (1), наведено приклади індивідуальних задач як ілюстрація ефективності вибраного підходу. Залежно від вибраного критерію пошук компромісного розв'язку сформульованої в роботі транспортної задачі може вимагати розв'язування однієї детермінованої транспортної задачі або застосування ітераційної процедури. Ще один підхід до розв'язування задачі (1), що демонструється на прикладі розв'язування транспортної задачі в умовах невизначеності, запропоновано у [8].

У роботі [9] показано можливість застосування викладеної в [5] конструктивної теорії знаходження компромісного розв'язку до розв'язування в умовах невизначеності задач дробово-лінійного програмування: наведено дві постановки задачі дробово-лінійного програмування в умовах невизначеності (у першій невизначеність стосується значень коефіцієнтів чисельника, у другій – значень коефіцієнтів знаменника), запропоновано кілька компромісних критеріїв, обґрунтовано побудову компромісного розв'язку для першої постановки задачі, наведено результати експериментів з вивчення залежності вихідних даних задачі від окремих параметрів.

У статті [10] в умовах невизначеності розглядається двоетапна задача календарного планування (неоднозначність стосується векторів вагових коефіцієнтів критеріїв для кожного пристрою на другому етапі задачі).

Дослідження оптимізаційних задач з комбінаторними обмеженнями, у тому числі в умовах невизначеності, здійснюється також у рамках такого наукового напрямку, як евклідова комбінаторна оптимізація. У роботах засновника цього напрямку Ю. Г. Стояна та численних представників цієї наукової школи вивчаються властивості евклідових комбінаторних множин, побудова математичних моделей практичних задач як евклідових задач комбінаторної оптимізації, обґрунтовуються методи розв'язування таких задач.

Для задач з імовірнісною невизначеністю у роботах [11; 12] запропоновано підхід до постановок задач, який ґрунтується на введенні відношення порядку на множині випадкових величин.

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – деякий імовірнісний простір. Випадкові величини, визначені на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, позначатимемо літерами напівжирного накреслення ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$).

Упорядкування дискретних випадкових величин, серед можливих значень яких є найменше, у [11] пропонується здійснювати на основі послідовного порівняння математичних сподівань, дисперсій, можливих значень та відповідних імовірностей випадкових величин. У другому підході до упорядкування (див., наприклад, [12]) розглядається характеристичний вектор випадкової величини, компонентами якого є визначені її числові характеристики. Здійснюється розбиття заданої множини незалежних випадкових величин за еквівалентністю на основі рівності характеристичних векторів, на отриманій фактор-множині вводиться лінійний порядок відповідно до лексикографічного порядку характеристичних векторів представників цих класів. Послідовне порівняння числових характеристик випадкових величин дозволяє краще враховувати особливості реальних ситуацій, ніж заміна випадкових величин однією з їх числових характеристик.

Ґрунтуючись на розглянутих підходах до впорядкування випадкових величин, запропоновано постановки оптимізаційних задач, які використовують розуміння максимуму (мінімуму) у відповідності до зазначених відношень порядку (якщо порядок вводиться відповідно до першого підходу, то говоритимемо про S -задачі, якщо відповідно до другого – H -задачі). Представлено як задачі, у яких випадковими величинами є коефіцієнти цільової функції, так і такі, де випадковими величинами є компоненти розв'язку.

В інших роботах цих авторів розглянуто розв'язування задач стохастичної комбінаторної оптимізації на загальній множині розміщень $E_n^k(G)$, під якою розуміють множину всіх упорядкованих k -вбірок із мультимножини $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ вигляду $(g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k})$, де $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t \quad \forall i_j, i_t \in J_n \quad \forall j, t \in J_k$ (тут і далі J_n позначає множину n перших натуральних чисел).

Розв'язування лінійної безумовної H -задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях, тобто задачі вигляду

$$L(\mathbf{x}^*) = \operatorname{extr}_{\mathbf{x} \in E_n^k(G)} \sum_{j=1}^k c_j x_j, \quad \mathbf{x}^* = \arg \operatorname{extr}_{\mathbf{x} \in E_n^k(G)} \sum_{j=1}^k c_j x_j,$$

розглядається в роботі [13].

Встановлено, що коли характеристичний вектор випадкової величини задовольняє умову

$$h_i(\mathbf{ua} + \mathbf{vb}) = u_i^{\lambda_i} h(\mathbf{a}) + v_i^{\lambda_i} h(\mathbf{b}) \quad \forall i \in J_s,$$

причому $H_{r-1}(\mathbf{g}_i) = H_{r-1}(\mathbf{g}_j) \quad \forall i, j \in J_n, \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j \in G$ і з $c_j \neq c_j$ впливає $c_i^{\lambda_r} \neq c_j^{\lambda_r} \quad \forall r \in J_s$, то r -та компонента однієї з мінімалей у розв'язку стохастичної задачі може бути одержана з розв'язку спеціальної детермінованої лінійної безумовної задачі комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Крім того, показано, що мінімаль вихідної задачі може бути сформована із мінімалей у розв'язках H -задач стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях менших вимірностей.

У випадку, коли всі коефіцієнти цільової функції мають однаковий знак, мінімаль у розв'язку H -задачі може бути сформована без розв'язування детермінованих задач. Останні твердження покладені в основу редуційного методу розв'язування лінійної безумовної задачі стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях. У роботах [14–17] одержано аналогічні результати для S -задач.

Статті [12; 18] описують застосування алгоритму в рамках методології гілок і меж для розв'язування лінійних умовних задач стохастичної комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Розглядаються

задачі, у яких або коефіцієнт цільової функції, або елементи мультимножини є незалежними випадковими величинами з додатним значенням першої компоненти характеристичного вектора.

Разом із розглянутими напрямками відзначимо також роботи, присвячені обґрунтуванню методів розв'язування окремих класів задач комбінаторної оптимізації зі стохастичною невизначеністю.

Л. В. Сухомлин у [19] розглядає застосування декомпозиційного генетичного алгоритму до розв'язування задачі комівояжера, у якій «відстані» між пунктами є випадковими величинами із заданими щільностями розподілу. Автором вводиться поняття «віддаленість одного пункту від іншого», яка тим більша, чим більша ймовірність того, що випадкова «відстань» між пунктами виявиться більшою певного порогового значення.

Для випадку, коли випадкові величини є нормально розподіленими, описано ітераційну процедуру розв'язування задачі. На першому етапі відбувається кластеризація пунктів обходу з урахуванням ймовірнісної невизначеності у відстанях між пунктами. У результаті цього етапу одержується кілька груп пунктів, у кожній з яких розраховується положення центру ваги. Для кожної пари суміжних кластерів знаходиться найменша відстань поєднання. На наступному етапі розв'язується стохастична задача знаходження найкоротшого маршруту між заданими пунктами у кожному кластері. Розв'язання цієї задачі передбачає використання стохастичного аналогу генетичного алгоритму, для якого обґрунтовано критерій відбору у разі формування нової популяції. Розв'язок вихідної задачі одержується з'єднанням індивідуальних маршрутів кластерів за допомогою «перемичок», знайдених на попередніх етапах.

У роботах [20; 21] розглядається складання плану формування поїздів як задачі комбінаторної оптимізації. Розробка якісного плану формування поїздів розглядається як найбільш ефективний шлях мінімізації добових вагоно-годин накопичення составів. План формування поїздів може бути поліпшений, якщо вважати параметри накопичення випадковими величинами, які набувають значень у певному інтервалі, у межах якого можна на них впливати.

Урахування в такий спосіб ймовірнісної невизначеності вимагає уточнення цільової функції для відображення можливого ризику неотримання значення для виконання плану формування поїздів, який виникає, якщо параметр накопичення набуває значення, які є відхиленнями у бік зменшення від математичного сподівання. Як кількісна міра ризику приймається добуток ймовірності настання небажаної події на величину втрат у разі її настання.

Як небажана подія розглядається перевищення прийнятої у разі побудови плану формування поїздів величини параметра накопичення. Для випадку, коли параметри накопичення є нормально розподіленими випадковими величинами, ймовірність цієї події обчислюється за формулою

$$P = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{c - \bar{c}}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right),$$

де $\operatorname{erf}(\cdot)$ – функція похибок Лапласа, c – параметр накопичення, $\bar{c}$ – математичне сподівання величини параметра накопичення, а σ^2 – його дисперсія.

Величина втрат визначається як різниця між математичним сподіванням параметра накопичення і його значенням, помножена на вартість вагоно-годин і норму кількості вагонів у складі поїзда. Крім зазначених втрат, цільова функція відображає витрати з окремими операціями, що здійснюються у процесі формування поїздів. Розв'язування сформульованої задачі здійснюється за допомогою генетичного алгоритму.

Висновок

Урахування невизначеності вхідних даних, у тому числі ймовірнісної, у постановках оптимізаційних задач вимагає уточнення розуміння того, який розв'язок є допустимим, яким чином визначається оптимальний розв'язок. Останніми роками було запропоновано різні підходи до формалізації задач стохастичної комбінаторної оптимізації та обґрунтовано алгоритми розв'язування окремих класів задач у таких постановках. Актуальною є розробка ефективних методів розв'язування задач стохастичної комбінаторної оптимізації як у загальновідомих, так і нових постановках.

Література

1. Angel A. Juan, Javier Faulin, Scott E. Grasman, Markus Rabe, Gonçalo Figueira. A review of simheuristics: Extending metaheuristics to deal with stochastic combinatorial optimization problems. *Operations Research Perspectives*. 2015. Vol. 2. P. 62–72. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.orp.2015.03.001>.
2. Buchheim C., Pruenke J. K-adaptability in stochastic combinatorial optimization under objective uncertainty. *European Journal of Operational Research*. 2019. Vol. 277. Issue 3. P. 953–963. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.03.045>.
3. Archetti C., Feillet D., Mor A., Speranza M. G. Dynamic traveling salesman problem with stochastic release dates. *European Journal of Operational Research*. 2020. Vol. 280. Issue 3. P. 832–844. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.07.062>.
4. Oyola J., Arntzen H., Woodruff D. L. The stochastic vehicle routing problem: a literature review. Part I: models. *EURO J Transp Logist*. 2018. Iss. 7. P. 193–221. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13676-016-0100-5>.
5. Pavlov A. A. Optimization for one class of combinatorial problems under uncertainty. *Адаптивні системи автоматичного управління*. 2019. Т. 1. № 34. С. 81–89. DOI: <https://doi.org/10.20535/1560-8956.1.2019.178233>.

6. Pavlov A. Combinatorial optimization under uncertainty and formal models of expert estimation. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія : Системний аналіз, управління та інформаційні технології. 2019. № 1. С. 3–7. DOI: <https://doi.org/10.20998/2079-0023.2019.01.01>.
7. Pavlov A. A., Zhdanova E. G. The transportation problem under uncertainty. *J. Autom. Inform. Sci.* 2020. Т. 52, № 4. Р. 1–13. DOI: <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i4.10>.
8. Pavlov A. A., Zhdanova E. G. Finding a compromise solution to the transportation problem under uncertainty. *Адаптивні системи автоматичного управління*. 2020. Т. 1. № 36. С. 60–72. DOI: <https://doi.org/10.20535/1560-8956.36.2020.209764>.
9. Павлов О., Вознюк О., Жданова О. Задача дробово-лінійного програмування в умовах невизначеності. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія : Системний аналіз, управління та інформаційні технології. 2021. № 1 (5). С. 20–28. DOI: <https://doi.org/10.20998/2079-0023.2021.01.04>.
10. Павлов О., Халус О., Місюра О., Мельников О., Медведєв М. ПДС-алгоритми для двоетапної задачі календарного планування в детермінованій постановці та в умовах невизначеності. *Адаптивні системи автоматичного управління*. 2023. № 1(42). С. 184–196. DOI: <https://doi.org/10.20535/1560-8956.42.2023.279170>.
11. Iemets O. O., Barbolina T. N. Combinatorial Optimization Model of Packing Rectangles with Stochastic Parameters. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51. Iss. 4. P. 583–593. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-015-9749-2>.
12. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Метод гілок і меж розв'язування задач оптимізації лінійної цільової функції на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 2. С. 43–54.
13. Iemets O. O., Barbolina T. M. Solving Linear Unconstrained Problems of Combinatorial Optimization on Arrangements Under Stochastic Uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52. Iss. 3. P. 457–466. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9846-x>.
14. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Побудова і дослідження математичної моделі задачі директора зі стохастичними параметрами. *Вісник Черкаського університету. Серія : Прикладна математика. Інформатика*. 2014. № 18 (311). С. 3–11.
15. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Лінійні оптимізаційні задачі на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю: властивості і розв'язання. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2016. № 1. С. 107–119. DOI: [10.20535/SRIT.2308-8893.2016.1.11](https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2016.1.11)
16. Iemets O. O., Barbolina T. M. Properties of the linear unconditional problem of combinatorial optimization on arrangements under probabilistic uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52. Iss. 2. P. 285–295. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9825-2>.
17. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Властивості лінійних безумовних задач оптимізації на розміщеннях з імовірнісною невизначеністю. *Доповіді НАН України*. 2016. № 2. С. 31–37. DOI: <http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.02.031>.
18. Ємець О. О., Барболіна Т. М. Стохастична оптимізація на розміщеннях: властивості лінійних безумовних задач. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2017. № 1. С. 147–158.
19. Сухомлин Л. В. Стохастична задача маршрутизації високої розмірності в умовах неточно заданих вихідних даних. *Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського*. 2015. № 5. С. 149–154. URL: https://visnikkrmu.kdu.edu.ua/statsti/2015_5_149-5-2015.pdf (дата звернення: 26.10.2024).
20. Прохоров В. М. Розробка методу розрахунку плану формування поїздів на основі стохастичної комбінаторної оптимізації. *ScienceRise*. 2016. Т.12, № 2(29). С. 53–56. DOI: [10.15587/2313-8416.2016.84109](https://doi.org/10.15587/2313-8416.2016.84109).
21. Прохоров В. М., Рябушка Ю. А. Розрахунок плану формування поїздів на основі стохастичної комбінаторної оптимізації. *Збірник наукових праць Українського державного університету залізничного транспорту*. 2016. Вип. 165. С. 215–224.

References

1. Juan, A. A., Faulin, J., Grasman, S. E., Rabe, M., & Figueira, G. (2015). A review of simheuristics: Extending metaheuristics to deal with stochastic combinatorial optimization problems. *Operations Research Perspectives*, 2, 62–72. <https://doi.org/10.1016/j.orp.2015.03.001>.
2. Buchheim, C. & Prunte, J. (2019). K-adaptability in stochastic combinatorial optimization under objective uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 277(3), 953–963. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.03.045>.
3. Archetti, C., Feillet, D., Mor, A. & Speranza, M. G. (2020). Dynamic traveling salesman problem with stochastic release dates. *European Journal of Operational Research*, 280(3), 832–844. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.07.062>.
4. Oyola, J., Arntzen, H. & Woodruff, D. L. (2018). The stochastic vehicle routing problem: a literature review. Part I: models. *EURO J Transp Logist*, 7, 193–221. <https://doi.org/10.1007/s13676-016-0100-5>.
5. Pavlov, A. A. (2019). Optimization for one class of combinatorial problems under uncertainty. *Adaptive systems of automatic control*, 1(34). 81–89. <https://doi.org/10.20535/1560-8956.1.2019.178233>.
6. Pavlov, A. (2019). Combinatorial optimization under uncertainty and formal models of expert estimation. *Bulletin of National Technical University "KhPI". Series: System Analysis, Control and Information Technologies*, 1, 3–7. <https://doi.org/10.20998/2079-0023.2019.01.01>.
7. Pavlov, A. A. & Zhdanova, E. G. (2020). The transportation problem under uncertainty. *J. Autom. Inform. Sci.* 52(4), 1–13. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i4.10>.
8. Pavlov, A. A. & Zhdanova, E. G. (2020). Finding a compromise solution to the transportation problem under uncertainty. *Adaptive systems of automatic control*, 1(36), 60–72. <https://doi.org/10.20535/1560-8956.36.2020.209764>.
9. Pavlov, O., Vozniuk, O. & Zhdanova, O. (2021). Zadacha drobovo-liniinogo programuvannia v umovah nevyznachenosti [The linear-fractional programming problem under uncertainty conditions]. *Bulletin of National Technical University "KhPI". Series: System Analysis, Control and Information Technologies*, 1 (5), 20–28. <https://doi.org/10.20998/2079-0023.2021.01.04> [in Ukrainian].
10. Pavlov, A., Khalus E., Misura E., Melnikov O. & Medvediev M. (2023). PDS-alhorytmy dla dvoetapnoi zadachi kalendarnoho planuvannia v determinovanii postanovtsi ta v umovakh nevyznachenosti [PSC-algorithms for a two-stage scheduling

problem in the deterministic formulation and under uncertainty conditions]. *Adaptive systems of automatic control*, 1(42), 184–196. <https://doi.org/10.20535/1560-8956.42.2023.279170> [in Ukrainian].

11. Iemets, O. O. & Barbolina, T. N. (2015). Combinatorial Optimization Model of Packing Rectangles with Stochastic Parameters. *Cybernetics and Systems Analysis*, 51(4), 583–593. <https://doi.org/10.1007/s10559-015-9749-2>.

12. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2018). Metod hilok i mezh rozv'iazuvannia zadach optymizatsii liniinoi tsilovoi funktsii na rozmishchenniakh z imovirnisnoiu nevyznachenistiu [Branch and bound method for solving problems of optimization of linear objective function on arrangements under probabilistic uncertainty]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, 2, 43–54 [in Ukrainian].

13. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Solving Linear Unconstrained Problems of Combinatorial Optimization on Arrangements Under Stochastic Uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*, 52(3), 457–466. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9846-x>.

14. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2014). Pobudova i doslidzhennia matematychnoi modeli zadachi dyrektora zi stokhastychnymy parametramy. *Cherkasy University Bulletin: Applied Mathematics. Informatics*, 18, 3–11.

15. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Liniini optymizatsiini zadachi na rozmishchenniakh z imovirnisnoiu nevyznachenistiu: vlastyvoli i rozv'iazannia [Linear optimization problems on arrangements under probabilistic uncertainty: properties and solution]. *System research and information technologies*, 1, 107–119. 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.1.11 [in Ukrainian].

16. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Properties of the linear unconditional problem of combinatorial optimization on arrangements under probabilistic uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*, 52(2), 285–295. <https://doi.org/10.1007/s10559-016-9825-2>.

17. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2016). Vlastyvoli liniinykh bezumovnykh zadach optymizatsii na rozmishchenniakh z imovirnisnoiu nevyznachenistiu [Properties of linear unconditional optimization problems on arrangements under probabilistic uncertainty]. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 2, 31–37. <http://dx.doi.org/10.15407/dopovidi2016.02.031> [in Ukrainian].

18. Iemets, O. O. & Barbolina, T. M. (2017). Vlastyvoli liniinykh bezumovnykh zadach optymizatsii na rozmishchenniakh z imovirnisnoiu nevyznachenistiu [Stochastic optimization on arrangements: properties of linear unconstrained problems]. *Visnyk of Zaporizhzhya National University. Physical and Mathematical Sciences*, 1, 147–158 [in Ukrainian].

19. Sukhomlyn, L. (2015). Stokhastychna zadacha marshrutyzatsii vysokoi rozmirnosti v umovakh netochno zadanykh vykhidnykh danykh [Stochastic routing problem of high dimension in conditions inaccurately given basic data]. *Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University*, (5), 149–154.

20. Prokhorov, V. (2016). Rozrobka metodu rozrakhunku planu formuvannia poizdiv na osnovi stokhastychnoi kombinatornoi optymizatsii [Development of calculation method for railway train formation plan on the basis of stochastic combinatorial optimization]. *ScienceRise*, 12(2), 53–56. <https://doi.org/10.15587/2313-8416.2016.84109> [in Ukrainian].

21. Prokhorov, V. M. & Riabushka, Yu. A. (2016). Rozrakhunok planu formuvannia poizdiv na osnovi stokhastychnoi kombinatornoi optymizatsii [Computation of trains formation plan on the base of stochastic combinatorial optimization]. *Collected scientific works of Ukrainian State University of Railway Transport*, 165, 215–224 [in Ukrainian].