

КОМП'ЮТЕРНІ ТЕХНОЛОГІЇ COMPUTER TECHNOLOGY

УДК 004:519.2

МЕТОД ПРОГНОЗУ КОРОТКОТРИВАЛИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЙ ЧУТЛИВОСТІ

DOI 10.36994/2788-5518-2021-02-02-13

Рогоза В.С., д.т.н., проф. Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», Київ, Україна. rosvetnik@gmail.com;

Іщенко Г.В. Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», Київ, Україна. annvalish@gmail.com

Анотація. У статті розглядається можливість використання детерміністичного підходу ідентифікації об'єкту досліджень до вирішення задачі короткотривалого прогнозування часових рядів, коли кількість експериментальних вибірок може бути малою (7 вибірок), і в якому етап тестування моделей не використовується у зв'язку з малою кількістю експериментальних даних. Пропонований підхід дає можливість отримати грубі прогнозовані величини параметрів об'єктів в умовах, коли відомі статистичні та детерміністичні методи не придатні, тобто вже на перших кроках дослідження об'єктів, а достовірність побудованих моделей оцінюється на підставі обчислень функцій чутливості створених моделей до варіації величин прогнозованих параметрів.

Ключові слова: часові ряди, мала множина експериментальних вибірок, прогнозування часових рядів, оцінка достовірності моделей прогнозу, функції чутливості.

PROCEDURE FOR PREDICTION OF SHORT-TERM TIME SERIES USING SENSITIVITY FUNCTIONS

Walery Rogoza, Dr. habil., Prof., National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine. rosvetnik@gmail.com;

Ann Ischenko, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine. annvalish@gmail.com

Abstract. The paper considers the possibility of using a deterministic approach to identifying the object of study to solve the problem of short-term prediction of time series, when the number of experimental samples may be too small in order to test and correct prediction models. The proposed approach makes it possible to obtain rough predicted values of object parameters in conditions when known statistical and deterministic methods

are not suitable, that is at the first steps of the study of objects. The authors consider the possibility of using a deterministic approach to identifying the object of study to solve the above problem of short-term prediction of time series, for which the number of experimental samples can be reduced to 7. The proposed approach makes it possible to obtain predicted values of object parameters in conditions when the above statistical and deterministic methods are not suitable, that is at the first steps of the study of objects, and the reliability of the constructed models is evaluated by calculating the sensitivity functions of models with respect to the predicted parameters. In certain situations, even such a rough analysis becomes absolutely necessary. For example, such situations include an approximate assessment of abnormal climatic changes in environmental characteristics at the first steps of their manifestation, in order to introduce protective measures for the population to prevent the catastrophic consequences of the rapid development of these phenomena. The method described in the article is based on the construction of alternative forecasting models for each the parameters of the object of study and selection among these models allow us to make a forecast with more probable reliability and accuracy. Alternative models are built in the form of second-order Kolmogorov-Gabor polynomials (such models are called particular models of the object or process under study). The idea of using particular predictive models using second-order Kolmogorov-Gabor polynomials was first proposed by one of the authors of this article in his previous article. But in contrast to the mentioned method, the authors propose to select models by the values of the sensitivity of particular models with respect to changes in parameter values, rather than on the basis of extrapolation of partial increments of parameter values. In this way, we can simplify the procedures for building and selecting the created models.

Keywords: *time series, small set of experimental samples, time series prediction, estimation of reliability of forecast models, sensitivity functions.*

Вступ

Дослідники часто мають справу з даними, які представляють динаміку процесу в часі. Дані такого роду класифікуються як часові ряди. Аналіз закономірностей, які демонструють часові ряди, має принципове значення для встановлення зв'язків між величинами параметрів (які звичайно називаються змінними станів об'єктів, які досліджуються), що описують ті чи інші процеси в техніці, суспільстві, екології, тощо. Якщо варіації параметрів в часі підпорядковуються певним закономірностям, то між параметрами можна встановити взаємозалежності в формі математичних моделей. Одною з центральних задач дослідження часових рядів є прогнозування змін величин параметрів в часі з використанням математичних моделей, побудованих на підставі експериментальних даних, зібраних під час спостереження за об'єктом досліджень.

Експериментальні дані звичайно представляються у вибірках $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(k)$, які отримує дослідник у дискретні моменти часу (які ми умовно позначимо порядковими числами $0, 1, \dots, k$), і використовуються для побудови та застосування рівнянь, які виражають функціональні залежності між параметрами. Традиційно цю процедуру поділяють на три етапи: (а) синтез моделі (іноді її називають навчанням моделі [1] на підставі даних, отриманих з вибірок $P(0)$, $P(1)$, ..., $P(k)$), (б) тестування моделі на експериментальних

вибірках $P(k+1)$, $P(k+2)$, ..., $P(k+l)$, (в) використання побудованої моделі для прогнозування величин параметрів в майбутні моменти часу $(k+l+1)$, $(k+l+2)$, ..., $(k+l+m)$ [2].

Для вирішення задачі прогнозу часових рядів найбільшого поширення набули різні варіанти методів, в яких передбачається використання достатньо великих наборів вибірок і обчислення статистичних характеристик, яким підкоряються зміни величин параметрів у часі [3]. Ці дані дозволяють дослідникам встановлювати закономірності зміни параметрів і при певних умовах будувати достатньо точні для практики математичні моделі процесів. Практичний досвід аналізу різноманітних процесів статистичними методами дає підстави вважати, що в більшості випадків добрі для практики результати можна отримати тоді, кількість експериментальних вибірок, які використовуються для навчання та тестування моделей $k+l$, приблизно в 10 - 15 разів перевищує кількість вибірок m , параметри яких підлягають прогнозуванню. Таким чином, якщо, скажімо, ставиться задача прогнозування часового ряду на 10 часових кроків вперед, то тестовий набір має складатися принаймні зі 100 – 150 експериментальних вибірок. Це досить жорстка умова, яку не завжди вдається виконати.

Другий підхід для вирішення задачі прогнозу часових рядів полягає у використанні детерміністичних моделей, ідея яких спирається на методах ідентифікації динамічних систем [4]. Наприклад, серед цих підходів можна відзначити метод фільтрації Кальмана [5] та метод групового врахування аргументів МГВА [6]. Ці методи дозволяють певною мірою зменшити кількість експериментальних вибірок, необхідних для побудови моделей, але таких вибірок має бути все ж таки достатньо для виконання етапів навчання та тестування моделей, а крім того, на часові ряди накладаються певні умови [5], перевірка яких є неможливою на малих множинах експериментальних вибірок.

Разом з тим, дослідники іноді стикаються з випадками, коли у своєму розпорядженні вони мають невелику кількість експериментальних зразків (скажімо, 7 – 10), на підставі яких треба виконати короткотривалий грубий прогноз зміни величин параметрів (скажімо, на 1 – 3 часові кроки вперед). В таких ситуаціях, експериментальних даних стає занадто мало для того, щоб виконати повноцінний статистичний аналіз або аналіз за допомогою згаданих вище детерміністичних моделей, і більш того, навіть реалізація етапу тестування та корекції моделей перед їх застосуванням стає неможливою. Це ускладнює перевірку достовірності та точності моделей, навіть якщо їх вдається побудувати.

В цій статті автори розглядають можливість використання детерміністичного підходу ідентифікації об'єкту досліджень до вирішення означеної вище задачі короткотривалого прогнозування часових рядів, для якого кількість експериментальних вибірок може бути скорочена до 7, і в якому етап тестування моделей не використовується у зв'язку з малою кількістю експериментальних даних. Пропонований підхід дає можливість отримати грубі прогнозовані величини параметрів об'єктів в умовах, коли згадані вище

статистичні та детерміністичні методи не придатні, тобто вже на перших кроках дослідження об'єктів, а достовірність побудованих моделей оцінюється на підставі обчислень функцій чутливості створених моделей до варіації величин прогнозованих параметрів. В певних ситуаціях навіть такий грубий аналіз стає конче необхідним. Наприклад, до таких ситуацій можна віднести приблизну оцінку аномальних змін характеристик екологічного середовища вже на перших кроках їх прояви, щоб впровадити захисні засоби безпеки для населення з метою запобігання катастрофічних наслідків швидкого розвитку цих явищ.

Метод, що описується в статті, базується на побудові альтернативних моделей прогнозування для кожного з параметрів об'єкту досліджень і відбору серед цих моделей таких, які дозволяють виконати прогноз з більш імовірною достовірністю і точністю. Альтернативні моделі будуються в формі многочленів Колиогорова-Габора другого порядку [6] (такі моделі назвемо частковими моделями об'єкту чи процесу, що досліджується). Ідея використання часткових прогнозуючих моделей з використанням многочленів Колмогорова-Габора другого порядку вперше була запропонована одним з авторів цієї статті в праці [7]. На відміну від методу, описаного в [7], автори пропонують здійснювати відбір моделей за величинами чутливості часткових моделей до змін величин параметрів, а не на підставі екстраполяції часткових приростів величин параметрів. В такий спосіб можна дещо спростити процедури побудови та відбору створених моделей.

Передбачається, що система параметрів, які описують стани об'єктів, задовольняє наступним умовам:

Вибрані для аналізу параметри є найважливішими чисельними характеристиками об'єкту, які не є похідними від інших параметрів, а самі по собі визначають з достатньою точністю стани об'єкту.

Процес має бути безперервним та таким, в якому параметри не змінюються стрибкоподібно на короткотривалому інтервалі спостереження та прогнозування.

Множина вибраних параметрів об'єкту не змінюється на протязі аналізу.

Побудова часткових математичних моделей

Припустимо, що ми маємо в своєму розпорядженні об'єкт, стани якого описуються вектором, що складається з n залежних від часу дійсних змінних $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, де t – час, а T – символ транспозиції. Припустимо також, що компоненти вектору $X(t)$ були визначені експериментально в дискретні моменти часу $t_0 > t_1 > t_2 > \dots > t_k$, причому інтервали часу між двома сусідніми моментами часу є приблизно однакові. Таким чином, з експериментів можна отримати набір векторів з відомими параметрами об'єкту дослідження $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_k) = X_0, X_1, \dots, X_k$, де $0, 1, \dots, k$ – номери вибірок. Задача полягає в тому, щоб приблизно розрахувати величини компонентів вектору $X(t)$ в майбутніх моментах часу $t_{k+1} > t_{k+2} > \dots >$

t_{k+m} . Іншими словами, задача полягає в обчисленні прогнозованих величин компонентів векторів $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_{k+m}$ на підставі відомих величин компонентів векторів $X_0, X_1, \dots, X_k$. В підході, який ми описуємо, мінімальна величина k становить 6, а максимальна величина величини m в принципі не може бути визначена, оскільки точність прогнозу залежить не тільки від властивостей самих моделей, але й від складності характеристик процесів, які досліджуються. Наприклад, ергодичні та стаціонарні процеси піддаються більш точному прогнозуванню, ніж інші, тоді як, скажімо, задача прогнозування параметрів «білого» шуму взагалі не піддається вирішенню жодним з методів прогнозу (в тому числі і нашим методом).

Будемо розглядати об'єкт, який аналізується, як «чорну скриню», відомі параметри об'єкту на попередніх часових кроках – як «вхідні» змінні, а невідомі величини параметрів, які обчислюються на підставі вхідних змінних (тобто прогнозовані параметри) – як «вихідні» змінні. Часткові математичні моделі об'єкту будемо будувати в формі поліномів Колмогорова-Габора (КГ) другого порядку [6]:

$$Y(x_i, x_j) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j + a_3 x_i^2 + a_4 x_j^2 + a_5 x_i x_j, \quad (1)$$

де x_i та x_j – це i -й та j -й вхідні параметри об'єкту, тобто i -й та j -й параметри об'єкту, величини яких відомі для часової точки tN , $Y(x_i, x_j)$ – це i -й вихідний параметр об'єкту (номер вихідного параметру визначається по номеру першого аргументу), тобто прогнозований i -й параметр об'єкту для часової точки $tN+1$, а $a_0, a_1, \dots, a_5$ – це дійсні коефіцієнти поліному. Параметр x_i назвемо первинним параметром, маючи на увазі те, що цей параметр входить в праву частину (1) як вхідний параметр (аргумент) та в ліву частину як вихідний (прогнозована величина), а вхідний параметр (аргумент) x_i – вторинним параметром.

Як можна бачити, модель (1) визначає залежність i -го вихідного параметру в момент часу $tN+1$ лише від двох вхідних параметрів – власне від самого цього параметру x_i та ще одного з параметрів об'єкту x_j , визначених в попередній момент часу tN . Оскільки кількість параметрів об'єктів звичайно є більшою ніж два, то модель (1) не відображає повної залежності i -го параметру від всіх параметрів об'єкту, і тому ми називаємо таку модель частковою. Зауважимо також, що ті самі змінні x_j та x_i входять як аргументи до часткової моделі прогнозу j -го параметру в момент часу $tN+1$

$$Y(x_j, x_i) = b_0 + b_1 x_j + b_2 x_i + b_3 x_j^2 + b_4 x_i^2 + b_5 x_j x_i, \quad (2)$$

де $Y(x_j, x_i)$ – це прогнозований j -й параметр об'єкту, а $b_0, b_1, \dots, b_5$ – це дійсні коефіцієнти поліному. В цьому співвідношенні первинним параметром є x_j , а вторинним – параметр x_i . Моделі (1) та (2) назвемо дуальними частковими моделями, в тому сенсі, що вони мають однакові аргументи, але відрізняються величинами поліноміальних коефіцієнтів.

Кількість часткових моделей даного об'єкту дорівнює кількості всіх попарних комбінацій вхідних параметрів C_n^2 , де n – це загальна кількість вхідних параметрів (аргументів) об'єкту, вибраних для аналізу. Побудова

повної множини часткових моделей для всіх пар параметрів об'єкту вимагає використання експериментальних даних, отриманих від сімох вибірок та формування і розв'язання системи рівнянь виду (1)-(2). Наприклад, в разі початку аналізу експериментальні вибірки приймають значення 0, ..., 7. В праві частини рівнянь підставляємо відомі з експериментів величини вхідних параметрів (аргументів) x_i в часовій точці t_N , а в ліві частини рівнянь – відомі з експериментів величини вихідних параметрів (величин функцій прогнозу) Y (x_i , x_j) для часових точок t_{N+1} . Вирішуючи отриманих таким шляхом систему лінійних рівнянь, можемо знайти числові величини коефіцієнтів всіх часткових моделей виду (1)-(2).

Вплив змін вхідних параметрів на зміни величини вихідних параметрів в часткових моделях може бути різним у різних часткових моделей. Очевидно, що внесок змін значень різних вхідних змінних у зміни вихідних змінних може бути різним. Цей внесок має визначальне значення при відборі часткових моделей для кожного прогнозованого параметру. Оцінки згаданих впливів параметрів побудуємо на підставі обчислень функцій чутливості часткових моделей на зміни тих вхідних параметрів, які входять до цих моделей. Скористаємося визначенням функцій чутливості динамічних об'єктів, які прийняті в теорії ідентифікації систем [4]. Для функції y від n змінних $y = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ класичне визначення напіввідносних функцій чутливості першого та другого порядків цієї функції від змінних x_i та x_j обчислюються відповідно до наступних визначень:

$$Q_{x_i}^{f_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{f_i}, \quad (3a)$$

$$Q_{x_j}^{f_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot \frac{x_j}{f_i}, \quad (3б)$$

$$Q_{x_i^2}^{f_i} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} \cdot x_i^2, \quad (3в)$$

$$Q_{x_j^2}^{f_i} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j^2} \cdot x_j^2, \quad (3г)$$

$$Q_{x_i x_j}^{f_i} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i \partial x_j} \cdot x_i \cdot x_j, \quad (3д)$$

де в нашій інтерпретації (а) – це функція чутливості першого порядку часткової моделі f_i відносно первинного параметру x_i , (б) - це функція чутливості першого порядку часткової моделі f_i відносно вторинного параметру x_j , (в) – це функція чутливості другого порядку часткової моделі f_i відносно первинного параметру x_i , (г) – це функція чутливості другого порядку часткової моделі f_i відносно вторинного параметру x_j , (д) - це змішана функція чутливості другого порядку часткової моделі f_i відносно первинного параметру x_i та вторинного параметру x_j .

Беручи до уваги те, що в (3) ми інтерпретуємо функцію f_i як i -ту часткову модель Y_i , і підставляючи вирази для часткових моделей типу (1)-(2) в співвідношення (3), можна отримати формули, за якими обчислюються функції чутливості, в термінах поліноміальних коефіцієнтів часткових моделей. Наприклад, для часткової моделі (1) ці формули приймають наступний вигляд:

$$Q_{x_i}^{Y_i} = (a_1 + 2a_3x_i + a_5x_j) \cdot x_i, \quad (4a)$$

$$Q_{x_j}^{Y_i} = (a_2 + 2a_4x_j + a_5x_i) \cdot x_j, \quad (4б)$$

$$Q_{x_i^2}^{Y_i} = 2a_3x_i^2, \quad (4в)$$

$$Q_{x_j^2}^{Y_i} = 2a_4x_j^2, \quad (4г)$$

$$Q_{x_ix_j}^{Y_i} = a_5 \cdot x_i \cdot x_j. \quad (4д)$$

В [7] доведено, що функції чутливості можуть бути використані для обчислення часткових прогнозованих величин параметрів об'єкту, який досліджується. Наприклад, використовуючи функції чутливості (4) моделі (1), можна обчислити прогнозовану величину i -го параметру в часовій точці t_{N+1} за допомогою виразу:

$$Y_i(t_{N+1}) = x_i(t_N) + Q_{x_i}^{Y_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i|_{t_N}} + Q_{x_j}^{Y_i} \cdot \Delta x_j/x_j|_{t_N} + \frac{1}{2} \cdot Q_{x_i^2}^{Y_i} \cdot \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)^2|_{t_N} + \frac{1}{2} \cdot Q_{x_j^2}^{Y_i} \cdot \left(\frac{\Delta x_j}{x_j}\right)^2|_{t_N} + Q_{x_ix_j}^{Y_i} \cdot \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right) \cdot \left(\frac{\Delta x_j}{x_j}\right)|_{t_N}, \quad (5)$$

де $\Delta x_i/x_i|_{t_N} = [x_i(t_N) - x_i(t_{N-1})]/[x_i(t_N)]$ – це зворотна різниця величини параметру x_i в поточній t_N та попередній t_{N-1} часових точках, поділена на поточну величину цього параметру, тобто відносна зворотна різниця параметру x_i ; аналогічний сенс мають і інші позначення.

Вираз (5) дає можливість обчислити прогнозовану величину $Y_i(t_{N+1})$ з використанням лише одної часткової моделі, а саме моделі (1). Як було визначено вище, кількість часткових моделей для обчислення кожного параметру $Y_i(t_{N+1})$, який прогнозується, визначається кількістю пар аргументів, які можна скласти з аргументом x_i . Якщо кількість параметрів об'єкту, вибраних для аналізу, дорівнює n , то для обчислення кожного параметру $Y_i(t_{N+1})$ можна утворити $n - 1$ пар аргументів (x_i, x_1) , (x_i, x_2) , (x_i, x_{i-1}) , (x_i, x_{i+1}) , (x_i, x_n) , і таким чином, $n - 1$ часткових моделей, в яких аргумент x_i буде первинним, а інші аргументи – вторинними.

Таким чином, для обчислення прогнозованої величини кожного з параметрів об'єкту $Y_i(t_{N+1})$, $i = 1, \dots, n$ ми маємо $n - 1$ варіантів прогнозу, отриманих за допомогою часткових моделей. Виникає слушне питання: які з цих прогнозованих величин більш достовірні та точні? Відповідь це питання дають такі міркування.

Функції чутливості в (5) є своєрідними вагами внесків кожного з доданків формули (5) в прогнозовану величину i -го параметру $Y_i(t_{N+1})$ – чим більша вага конкретного доданку, тим більші будуть похибки, які вносяться неточністю обчислення цього доданку в величину $Y_i(t_{N+1})$. Оскільки величини деяких

параметрів змінюються від одного моменту часу до другого з більшою швидкістю ніж інші, і ми заздалегідь не знаємо, з якою швидкістю зміняться ці величини від моменту часу t_N до моменту часу t_{N+1} , то більш достовірні результати прогнозу слід очікувати від тих часткових моделей, похибка яких менш критична до швидких змін величин параметрів, тобто в яких чутливості, що входять в вираз (5), будуть меншими по модулю. Іншими словами, внаслідок того, що за описаними вище умовами аналізу ми не маємо можливості перевірити точність створюваних часткових моделей, то вибір часткових моделей за величинами чутливості з більшою імовірністю буде вносити менші похибки прогнозу.

Послідовність вирішення задачі прогнозу на коротких часових інтервалах

Враховуючи описані особливості задачі, яку ми розглядаємо, можна запропонувати наступну послідовність вирішення задачі прогнозу часових рядів на коротких часових інтервалах з використанням часткових математичних моделей.

Таблиця 1.
Величини параметрів x , y і z , отримані
з експериментальних вибірок $B(0)$, ..., $B(8)$

Вибірки	x	y	z
$B(0)$	0.2366	0.2068	0.2496
$B(1)$	0.2403	0.2462	0.2731
$B(2)$	0.3033	0.2406	0.2856
$B(3)$	0.2367	0.2688	0.2966
$B(4)$	0.2679	0.2607	0.2951
$B(5)$	0.3308	0.2484	0.2823
$B(6)$	0.2410	0.3136	0.3370
$B(7)$	0.3151	0.2736	0.3713
$B(8)$	0.4963	0.2788	0.3282

Крок 1. Вибір найбільш нових семи послідовних експериментальних вибірок для побудови дуальних часткових моделей, формування системи лінійних рівнянь виду (1)-(2) для знаходження величин поліноміальних коефіцієнтів часткових моделей.

Крок 2. Обчислення величин поліноміальних коефіцієнтів дуальних часткових моделей шляхом розв'язання системи лінійних рівнянь, сформованих на кроці 1.

Крок 3. Обчислення альтернативних прогнозованих величин параметрів для кожного параметру $Y_i(t_{N+1})$ з використанням часткових моделей.

Крок 4. Обчислення функцій чутливості часткових моделей за формулами (4).

Крок 5. Відбір з альтернативних варіантів прогнозу параметрів $Y_i(t_{N+1})$ тих значень, які пропонують часткові моделі з мінімальними абсолютними значеннями чутливості, і прийняти ці величини як найбільш достовірні прогнозовані величини.

Хоч, на наш погляд, ці етапи є досить прозорими, але у читача може виникнути питання, які саме чутливості брати до уваги – першого або другого порядку, бо від цього залежить стратегія відбору найбільш достовірних рішень? Це питання було предметом додаткових досліджень авторів цієї статті. Більшість числових експериментів, проведених авторами, дають підстави зробити наступні висновки.

Чутливості першого порядку допомагають виділити ті часткові моделі, які з більшою надійністю фільтрують моделі на найближчу перспективу, тобто на один часовий крок вперед, t_{N+1} , тоді як чутливості другого порядку дозволяють відбирати часткові моделі для більш віддаленої перспективи, тобто на два або більше кроків вперед, t_{N+2} , t_{N+3} , ..., хоча точність часткових моделей погіршується на наступних кроках, і найчастіше стає вже практично неприйнятною десь через три-чотири кроки. Відповідно, стратегія відбору найбільш достовірних часткових моделей може бути різною в залежності від характеристик поведінки в часі об'єктів, які досліджуються.

Приклад

Описаний підхід проілюструємо на прикладі часового ряду, який було проаналізовано іншим методом в [7] одним з авторів цієї статті. Припустимо, що дослідник вибрав три параметри x , y і z для дослідження певного об'єкту, причому величини цих параметрів отримані експериментальним шляхом з вибірок $B(0)$, ..., $B(8)$, де числа в дужках – це номери вибірок (Таблиця 1). На прикладі цього часового ряду проаналізуємо застосування описаного підходу до прогнозування величин параметрів.

Щоб спростити подальший аналіз, позначимо змінні, величини параметрів, які прогнозуються (тобто вихідні змінні у сенсі нашої моделі «чорної скриньки») великими літерами X , Y і Z , а змінні, які вважаються відомими вхідними параметрами - малими літерами x , y і z .

Для аналізу приймемо наступні умови. Будемо вважати, що значення змінних x , y і z з перших сімох вибірок $B(0)$, $B(1)$, ..., $B(6)$ є відомими, а з вибірок $B(7)$ та $B(8)$ – такі, які не відомі дослідникові і величини яких треба прогнозувати. А далі порівняймо результати прогнозу величин параметрів x , y і z з дійсними даними, що дасть нам можливість оцінити порядки величин похибок прогнозування.

Кроки 1 і 2. Зауважимо, що в цій задачі має бути сформовано шість часткових моделей для прогнозу величин змінних X , Y і Z . Використовуючи дані, представлені у вибірках $B(0)$, $B(1)$, ..., $B(6)$, формуємо та розв'язуємо системи лінійних рівнянь виду (1)–(2) для обчислення поліноміальних коефіцієнтів часткових моделей. Після виконання цих обчислень отримуємо наступні часткові моделі для прогнозування змінних X , Y і Z , де для зручності

порівняльного аналізу альтернативні часткові моделі згруповані парами для кожного прогнозованого параметру, тобто $X(x, y)$ і $X(x, z)$, $Y(y, x)$ і $Y(y, z)$, $Z(z, x)$ і $Z(z, y)$:

$$X(x, y) = 2.0455 - 16.2210x + 1.3324y - 14.3273x^2 - 49.3550y^2 + 95.4847xy, \quad (6)$$

$$X(x, z) = 39.3362 - 250.489x - 54.623z + 96.1379x^2 - 197.77z^2 + 689.9113xz, \quad (7)$$

$$Y(y, x) = 1.5550 - 5.6708y - 5.252x + 14.9988y^2 + 12.8445x^2 - 5.1894yx, \quad (8)$$

$$Y(y, z) = -25.29022 - 179.125x + 340.38z - 327.215x^2 - 1131.1z^2 + 1202.8xz, \quad (9)$$

$$Z(z, x) = 1.9487 + 2.0640z - 15.5134x - 11.7447z^2 + 18.0084x^2 + 20.3766zx, \quad (10)$$

$$Z(z, y) = -20.3054 + 268.05z - 136.966y - 875.559z^2 - 243.37y^2 + 909.63zy. \quad (11)$$

Крок 3. Обчислюємо величини вихідних змінних X , Y і Z , використовуючи часткові моделі (6)–(11) та найбільш нові значення вхідних змінних x , y і z . Для обчислення величин змінних X , Y і Z для прогнозованої вибірки $B(7)$ найбільш новими величинами змінних x , y і z є ті, які отримані з експериментальної вибірки $B(6)$, а для обчислення величин змінних X , Y і Z для прогнозованої вибірки $B(8)$ найбільш новими величинами змінних x , y і z є ті, які отримані з прогнозованої вибірки $B(7)$. Результати обчислень наведені в таблиці 2, в якій для порівняння представлені точні величини (вибрані з таблиці 1) та прогнозовані величини параметрів, отримані шляхом використання часткових моделей, а також відносні похибки прогнозування за різними частковими моделями.

Крок 4. Обчислюємо функції чутливості створених моделей по параметрах x , y і z , для прогнозованих вибірок $B(7)$ та $B(8)$, скориставшись формулами (4) і підставляючи до них найбільш нові експериментальні значення цих параметрів. Результати обчислень для вибірок представлені в таблицях 3 – 8.

Таблиця 2.
Точні величини параметрів X , Y і Z та прогнозовані величини цих параметрів для вибірок $B(7)$ та $B(8)$, обчислені з використанням часткових моделей

Вибірki та похибки	$X(x, y)$	$X(x, z)$	$Y(y, x)$	$Y(y, z)$	$Z(z, x)$	$Z(z, y)$
$B(7)_{\text{точн}}$	$X_{\text{точн}} = 0.3151$	$X_{\text{точн}} = 0.3151$	$Y_{\text{точн}} = 0.2736$	$Y_{\text{точн}} = 0.2736$	$Z_{\text{точн}} = 0.3713$	$Z_{\text{точн}} = 0.3713$
$B(7)_{\text{прогноз}}$	0.0815	-0.2838	0.3398	-0.2836	0.2725	-0.1623
Похибка	0.74	1.09	0.24	2.04	0.27	1.44

Вибірки та похибки	$X(x, y)$	$X(x, z)$	$Y(y, x)$	$Y(y, z)$	$Z(z, x)$	$Z(z, y)$
$B(8)_{\text{точн}}$	$X_{\text{точн}} = 0.4963$	$X_{\text{точн}} = 0.4963$	$Y_{\text{точн}} = 0.2788$	$Y_{\text{точн}} = 0.2788$	$Z_{\text{точн}} = 0.3282$	$Z_{\text{точн}} = 0.3282$
$B(8)_{\text{прогноз}}$	0.4136	35.232	0.2990	-30.4869	5.9150	-25.7370
Похибка	0.17	69.99	0.07	110.35	17.02	79.42

Таблиця 3.

Величини функцій чутливості часткової моделі $X(x, y)$ параметрам x і y , обчислені для прогнозованих вибірок $B(7)$ і $B(8)$

Вибірки	$Q_x^{X(x,y)}$	$Q_y^{X(x,y)}$	$Q_{x^2}^{X(x,y)}$	$Q_{y^2}^{X(x,y)}$	$Q_{xy}^{X(x,y)}$
$B(7)$	1.643	-2.076	-1.664	-9.708	7.217
$B(8)$	0.276	1.205	-2.845	-7.389	8.232

Таблиця 4.

Величини функцій чутливості часткової моделі $X(x, z)$ по параметрам x і z , обчислені для прогнозованих вибірок $B(7)$ і $B(8)$

Вибірки	$Q_x^{X(x,z)}$	$Q_z^{X(x,z)}$	$Q_{x^2}^{X(x,z)}$	$Q_{z^2}^{X(x,z)}$	$Q_{xz}^{X(x,z)}$
$B(7)$	6.832	-7.297	11.168	-44.921	56.033
$B(8)$	20.879	5.905	19.09	-54.531	80.717

Таблиця 5.

Величини функцій чутливості часткової моделі $Y(y, x)$ по параметрам y і x , обчислені для прогнозованих вибірок $B(7)$ і $B(8)$

Вибірки	$Q_y^{Y(y,x)}$	$Q_x^{Y(y,x)}$	$Q_{y^2}^{Y(y,x)}$	$Q_{x^2}^{Y(y,x)}$	$Q_{yx}^{Y(y,x)}$
$B(7)$	0.779	-0.166	2.950	1.492	-0.392
$B(8)$	0.247	0.448	2.245	2.551	-0.447

Таблиця 6.

Величини функцій чутливості часткової моделі $Y(y, z)$ по параметрам y і z , обчислені для прогнозованих вибірок $B(7)$ і $B(8)$

Вибірки	$Q_y^{Y(y,z)}$	$Q_z^{Y(y,z)}$	$Q_{y^2}^{Y(y,z)}$	$Q_{z^2}^{Y(y,z)}$	$Q_{yz}^{Y(y,z)}$
$B(7)$	6.581	-15.101	-64.360	-256.922	127.114
$B(8)$	24.191	-63.313	-48.989	-311.880	122.190

Таблиця 7.

Величини функцій чутливості часткової моделі $Z(z, x)$ по параметрам z і x , обчислені для прогнозованих вибірок $B(7)$ і $B(8)$

Вибірки	$Q_x^{Z(z,x)}$	$Q_z^{Z(z,x)}$	$Q_{x^2}^{Z(z,x)}$	$Q_{z^2}^{Z(z,x)}$	$Q_{xz}^{Z(z,x)}$
$B(7)$	-0.317	0.008	-2.668	2.092	1.655
$B(8)$	-0.088	1.072	-3.238	3.576	2.384

Таблиця 8.

*Величини функцій чутливості часткової моделі $Z(z, y)$ по параметрам z і y ,
обчислені для прогнозованих вибірок B(7) і B(8)*

Вибірки	$Q_z^{Z(z,y)}$	$Q_y^{Z(z,y)}$	$Q_{z^2}^{Z(z,y)}$	$Q_{y^2}^{Z(z,y)}$	$Q_{zy}^{Z(z,y)}$
B(7)	-12.406	5.3112	-198.87	-47.869	96.133
B(8)	-49.480	18.497	-241.42	-36.436	92.407

Крок 5. Виконаємо відбір величин параметрів X , Y і Z для прогнозованих вибірок B(7) і B(8) з альтернативних варіантів прогнозу, виконаний на підставі функцій чутливості часткових моделей та порівняймо ці величини з дійсними величинами, які нам відомі в цьому прикладі.

Як можна бачити з даних таблиці 2, з двох альтернативних моделей $X(x, y)$ і $X(x, z)$ більш точною є модель $X(x, y)$ з похибками 0.74 для B(7) і 0.17 для B(8), ніж модель $X(x, z)$ з похибками, відповідно, 1.09 і 69.99. З двох альтернативних моделей $Y(y, x)$ і $Y(y, z)$ більш точною виявилася модель $Y(y, x)$ з похибками 0.24 для B(7) і 0.07 для B(8), ніж модель $Y(y, z)$ з похибками, відповідно, 2.04 і 110.35. І з двох альтернативних моделей $Z(z, x)$ і $Z(z, y)$ більш точною є модель $Z(z, x)$ з похибками 0.27 для B(7) і 17.02 для B(8), ніж модель $Z(z, y)$ з похибками, відповідно, 1.44 і 79.42.

Тому вибираємо такі прогнозовані величини:

- для вибірки B(7): $X_{\text{прогн}} = 0.0815$, $Y_{\text{прогн}} = 0.3398$, $Z_{\text{прогн}} = 0.2725$;
- для вибірки B(8): $X_{\text{прогн}} = 0.4136$, $Y_{\text{прогн}} = 0.2990$, $Z_{\text{прогн}} = 5.9150$.

З'ясуємо питання: чи можна такий самий відбір альтернативних моделей зробити на підставі величин функцій чутливості? Порівнюючи дані з таблиць 3 і 4, можна зробити висновок, що модель $X(x, y)$ має менші за модулем чутливості першого і другого порядку для B(7) і для B(8), ніж модель $X(x, z)$, тому пріоритетність моделі $X(x, y)$ підтверджується також аналізом величин функцій чутливості. Аналогічно, таким самим чином підтверджується пріоритетність зробленого нами вибору моделей $Y(y, x)$ і $Z(z, x)$.

Метою прикладу є ілюстрація тези про те, що відбір більш достовірних часткових моделей серед альтернативних варіантів може бути здійснений за ознакою малих чутливостей моделей до змін параметрів.

Звичайно цей приклад не є показовим з точки зору оцінки точності прогнозу, тому що кількість альтернативних моделей вибрана мінімальною – по дві моделі для кожного прогнозованого параметру. Ця кількість є надто малою для того, щоб зробити узагальнюючі висновки щодо всіх властивостей методу. Разом з тим, експерименти дають підставу стверджувати, що в разі більшої кількості параметрів об'єкту, коли в розпорядженні дослідника є більша кількість альтернативних часткових моделей, розширюються діапазони прогнозованих величин для кожного параметру, і таким чином, збільшується імовірність більш точного прогнозу.

Висновки

Описаний підхід дозволяє обчислювати грубі прогнозовані величини часового ряду в умовах обмеженої кількості експериментальних вибірок, коли інші відомі методи стають непридатними. Прогноз здійснюється шляхом побудови та використання альтернативних часткових моделей у формі поліномів Колмогорова-Габора другого порядку, які дозволяють виконувати прогноз на коротких інтервалах часу. Вибір часткових моделей з альтернативних варіантів може бути реалізований на підставі порівняльних оцінок чутливостей часткових моделей до змін параметрів і відбору тих моделей, які характеризуються найменшими величинами чутливостей. Ця теза проілюстрована на наведеному в статті простому прикладі.

Література

1. Рассел, С, Норвиг, П. Искусственный интеллект: современный подход [Текст]: пер. с англ./ С. Рассел, П. Норвиг. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. – 1408 с.
2. Witten, I. H. Data Mining: Practical machine learning tools and techniques [Текст] / I.H. Witten, E. Frank. – N.Y.: Elsevier: Morgan Kaufmann, 2011. – 630 p.
3. Бокс, Дж. Анализ временных рядов: прогноз и управление [Текст]: пер. с англ. / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. - Выпуски 1 (338 с.) и 2 (185 с.).
4. Льюнг, Л. Идентификация систем. Теория для пользователя [Текст]: пер. с англ. / Л. Льюнг. - М.: Наука, 1991. — 432 с.
5. Kalman, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems [Текст] / R. E. Kalman // Journal of Basic Engineering, 1960. — vol. 82, issue 1. — P. 35–45.
6. Ивахненко, А. Г. Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем [Текст] / А. Г. Ивахненко. - Київ.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
7. Rogoza, W. Method for the prediction of time series using small sets of experimental samples [Текст] / W. Rogoza // Applied Mathematics and Computation, 2019. - vol. 355. – P. 108 – 122.

References

1. Rassel, S.J. Artificial Intelligence. A Modern Approach [Text] / S. J. Rassel, P. Norvig. - N.J.: Prentice Hall, 2003. – 1408 p.
2. Witten, I.H. Data Mining: Practical machine learning tools and techniques [Text] / I. H. Witten, E. Frank. - N.J: Elsevier, Morgan Kaufmann, 2011. – 630 p.
3. Box, G. E. P. Time Series Analysis, Forecasting and Control [Text] / G. E. P. Box, G. M. Jenkins. - San Francisco: Holden-Day. – 1970. – issue.1 (338 p.), issue.2 (185 p.).
4. Ljung, L. System Identification. Theory for the user [Text] / L. Ljung. - N.J.: Prentice Hall. - 1999. — 432 p.
5. Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems [Text] / R.E. Kalman // Journal of Basic Engineering, 1960. — vol. 82, issue 1. - P. 35–45.
6. Ivakhnenko, A. G. Induktivny metod samoorganizacii modelej slozhnyh system [Text] / A. G. Ivakhnenko. - Kyiv: Naukova Dumka, 1982. – 296 p.
7. Rogoza, W. Method for the prediction of time series using small sets of experimental samples [Text] / W. Rogoza // Applied Mathematics and Computation, 2019. - vol. 355, P. 108 – 122.