

УДК 654.1-192

МОДЕЛЬ НАДІЙНОСТІ СИСТЕМ КОРОТКОЧАСНОЇ ДІЇ З ПЕРЕРИВАННЯМ ОБСЛУГОВУВАННЯ

DOI 10.36994/2788-5518-2021-02-02-18

Могилевич Д.І., д.т.н., проф. Навчально-науковий інститут телекомунікаційних систем Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна. mogilev11@ukr.net

Креденцер Б.П., д.т.н., проф. Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації ім. Героїв Крут, Київ, Україна. kredenzerbp@gmail.com

Кононова І.В., к.т.н., доц. Навчально-науковий інститут телекомунікаційних систем Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна. viti21@ukr.net

Могилевич В.Д., Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна. vadym.vadym63@gmail.com

Анотація. У статті представлено аналітичну модель з перериванням обслуговування об'єктів з часовим резервуванням, які використовуються не завжди, а періодично. Запропоновані системи виконують задачі, які надходять у випадковий час і вимагають часу для їхнього виконання.

У розробленій моделі враховано різні фактори реального функціонування цього класу систем.

Ключові слова: збій, відмова, коефіцієнт використання, часове резервування, показники надійності.

THE MODEL OF RELIABILITY OF SHORT-TERM OPERATION SYSTEMS WITH INTERRUPTION SERVICE

Dmytro Mogylevych, Dr.habil., Prof. The Educational and scientific Institute of Telecommunication Systems of the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine mogilev11@ukr.net

Borys Kredentser, Dr.habil., Prof. Military Institute of Telecommunications and Informatization named after Heroes Krut, Kyiv, Ukraine. kredenzerbp@gmail.com

Iryna Kononova, Ph. D., Ass. Prof. The Educational and scientific Institute of Telecommunication Systems of the Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine. viti21@ukr.net

Vadym Mohylevych, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine. vadym.vadym63@gmail.com

Abstract. This publication analyzes the results of theoretical research of reliability of the system of short-term operation with interrupted maintenance in which periodic redundancy and intermittent operation are provided. Time redundancy is a way to ensure

the reliability of the performance of objects that transmit information in conditions of disruptions, failures, and interruptions, by identifying and using the standby time. The statement of the research problem is formalized, and the system of object-time is analyzed as a condition-based structure consisting of two generalized elements: the reserved object and the reserved time.

The represented model conforms to communication systems and automated control systems, which belong to the group of complex technical systems that have a range of specific features regarding the reliability of their functioning. The developed model includes various factors of the real functionality of this class of systems.

The general approach to the solution of the formulated objective was analyzed by the results of the theoretical investigation of the system with short-period service interruptions in which an hourly excess and further service are provided. The calculated correlation for optimizing the periodicity of maintenance by a complex indicator of reliability – coefficient of technical maintenance of the system was obtained. The analytical expressions for the selected indicators of maintenance quality were obtained. The optimal values of service intervals were determined at which the values of quality indicators achieve extreme levels.

Recommendations for the organization of complex technical systems are provided.

Keywords: refusal, failure, utilization rate, temporary backup, reliability indicators

Вступ

Розглянемо систему ОЧ з поповнюваним резервом часу, де об'єкт представлений одним узагальненим структурним елементом. Нехай напрацювання об'єкта повністю розподілено за довільним законом $F(t) = P\{t_0 < t\}$ з кінцевим математичним очікуванням $\bar{t}_0$, а відмова виявляється у момент його виникнення (система з миттєвою індикацією відмов).

Система виконує завдання, які надходять у довільні моменти часу, причому проміжки часу між моментами надходження розподілені за експоненціальним законом з параметром γ_f . Вважатимемо, що тривалість виконання завдання настільки мала порівняно із середнім напрацюванням об'єкта до відмови, що нею можна практично знехтувати (система короточасної дії). Це означає, що якщо завдання, що надійшло, застає систему в працездатному стані, то воно виконується з ймовірністю одиниця.

Нехай у початковий момент часу $t = 0$ об'єкт працездатний та призначається планове попереджувальне технічне обслуговування через детермінований час T , що визначає періодичність проведення обслуговування. До початку виконання обслуговування може статися одна з двох незалежних подій: відмова об'єкта або надходження завдання. Нехай першою виникла відмова об'єкта. При цьому відразу починається відновлення його працездатності, тривалість якого t_b – випадкова величина, розподілена за експоненціальним законом з параметром μ та кінцевим математичним очікуванням $\bar{t}_b = 1/\mu$. Якщо в процесі відновлення надійшло завдання, то допускається запізнення (затримка) у його виконанні на час τ_d , який може бути випадковою величиною, розподіленою за експоненціальним законом з параметром γ , або детермінованою величиною $t_d = \text{const}$. Якщо відновлення працездатності об'єкта завершується до витрати резерву часу τ_d (або t_d), що

визначає допустимий час запізнення, то завдання виконується з ймовірністю одиниця, інакше в момент виконання умови $t_b > \tau_d$ (або $t_e > t_\partial$) виникає зрив функціонування системи (відмова виконання завдання) [1–2].

Нехай до моменту T об'єкт не відмовляє (відбулася подія $t_0 > T$). Тоді у призначений момент T починається технічне обслуговування, тривалість якого розподілено за експоненціальним законом з параметром θ . Якщо в процесі виконання обслуговування надходить завдання, то обслуговування припиняється, і об'єкт переводиться на основний (робочий) режим за випадковий час $t_{\text{пр}}$, розподілене за експоненціальним законом з параметром $\gamma_{\text{пр}}$. При цьому в системі передбачено допустимий час приведення об'єкта у готовність до виконання завдання τ_{d1} , яке може бути випадковою величиною з експоненціальним законом розподілу з параметром γ_1 або детермінованою величиною $t_{d1} = \text{const}$. Якщо $t_{\text{пр}} < \tau_{d1}$ (або $t_{\text{пр}} < t_{d1}$), то завдання, що надійшло виконується з ймовірністю одиниця, після чого об'єкт переводиться в режим завершення технічного обслуговування. В іншому випадку (при $t_{\text{пр}} > \tau_{d1}$ або $t_{\text{пр}} > t_{d1}$) у момент витрачення резерву часу виникає зрив функціонування системи (відмова виконання завдання).

Таким чином, в системі використовуються дві складові резерву часу, що поповнюється: одна складова передбачена у самій системі (τ_d і τ_{d1} або t_d і t_{d1}), а інша – обумовлена випадковим характером надходження завдань (іноді від моменту відмови об'єкта або початку виконання технічного обслуговування до моменту надходження завдання).

Необхідно отримати аналітичні вирази для вибраних показників якості обслуговування $K_{\text{ТВ}}(T)$ та $\bar{C}(T)$ (цільові функції) та визначити оптимальні значення періодичності обслуговування T^* і T_1^* , при яких значення показників якості набувають екстремальних значень: максимальне значення $K_{\text{ТВ}}(T^*)$ для коефіцієнта технічного використання та мінімальне $\bar{C}(T_1^*)$ – для середніх питомих витрат [3–4].

Отримання цільових функцій

Введемо до розгляду випадковий процес $x(t)$, що описує функціонування системи, граф станів та переходів якого зображено на рис. 1, де:

e_0 – стан, у якому об'єкт працездатний;

e_1 – стан, в якому об'єкт перебувати на технічному обслуговуванні і відсутні завдання;

e_2 – стан, у якому об'єкт відновлюється і відсутні завдання;

e_3 – стан, у якому об'єкт непрацездатний і завдання, що надійшло, очікує закінчення відновлення працездатності протягом допустимого часу τ_d (або t_∂);

e_4 – стан, в якому завдання, що надійшло, очікує закінчення переведення об'єкта з режиму обслуговування в робочий режим протягом допустимого часу τ_{d1} (або t_{d1});

e_5, e_6 – стани, в яких система знаходиться відповідно на відновленні або обслуговуванні після витрати поповнюваного резерву часу τ_d або τ_{d1} (t_d або t_{d1});

E_+, E_- – підмножини відповідно до працездатних та непрацездатних станів системи.

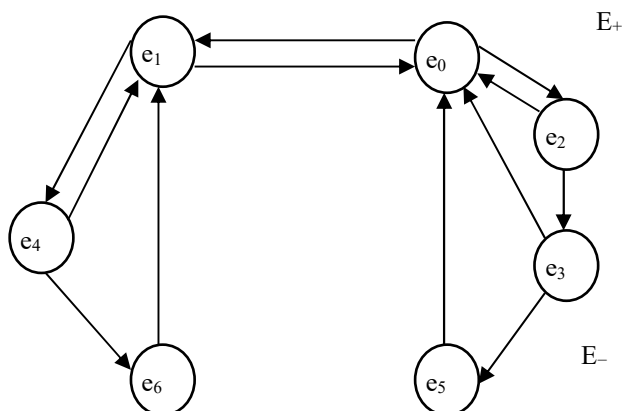


Рис. 1. Граф станів та переходів випадкового процесу $x(t)$, що описує функціонування системи з перериванням обслуговування

Технічний коефіцієнт використання $K_{TB}(T)$ визначається як стаціонарна ймовірність $x(t)$ процесі перебування в підмножині працездатних станів E_+ :

$$K_{TB}(T) = \sum_{i=0}^4 \pi_i a_i \left(\sum_{i=0}^6 \pi_i a_i \right)^{-1}. \quad (1)$$

Ймовірність $\pi_i (i = \overline{0,6})$ можна знайти за допомогою відомої системи рівнянь:

$$\pi_i = \sum_{j \in E} p_{ij} \pi_j,$$

де p_{ij} стаціонарні ймовірності переходу вкладень ланцюга Маркова.

Це система рівнянь з урахуванням графу станів та переходів $x(t)$ (рис. 1) має вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \pi_0 &= \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20} + \pi_3 p_{30} + \pi_5 p_{50}, \quad \pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_4 p_{41} + \pi_6 p_{61}, \\ \pi_2 &= \pi_0 p_{02}, \pi_3 = \pi_2 p_{23}, \pi_4 = \pi_1 p_{14}, \pi_5 = \pi_3 p_{35}, \pi_6 = \pi_4 p_{46} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

з урахуванням умови нормування $\sum_{i=0}^6 \pi_i = 1$.

Вирішуючи цю систему, отримуємо

$$\begin{aligned} \pi_0 &= B; \quad \pi_1 = \left(\frac{p_{01}}{p_{10}} \right) B; \quad \pi_2 = p_{02} B; \quad \pi_3 = p_{02} p_{23} B; \quad \pi_4 \\ &= p_{14} \left(\frac{p_{01}}{p_{10}} \right) B; \quad \pi_5 = p_{02} p_{23} p_{35} B; \quad \pi_6 = p_{14} p_{46} \left(\frac{p_{01}}{p_{10}} \right) B, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{де} \quad B = \left[1 - \left(\frac{p_{01}}{p_{10}} \right) p_{14} (1 - p_{46}) + p_{02} (1 - p_{23}) + p_{02} p_{23} p_{35} \right]^{-1}.$$

Підставимо знайдені значення $\pi_i (i = \overline{0,6})$ у загальну формулу (1) та отримаємо вираз для коефіцієнта технічного використання у загальному вигляді:

$$K_{\text{TB}}(T) = \frac{a_0 + p_{02}(a_2 + p_{23}a_3) + \left(\frac{p_{01}}{p_{10}}\right)(a_1 + p_{14}a_4)}{a_0 + \left(\frac{p_{01}}{p_{10}}\right)[a_1 + p_{14}(a_4 + p_{46}a_6)] + p_{02}[a_2 + p_{23}(a_3 + p_{35}a_5)]} \quad (4)$$

Використовуючи формули $a_i = \int_0^\infty x dF_i(x)$ і $p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t)$ та враховуючи вихідні умови задачі і прийняті допущення та обмеження, отримуємо наступний вираз для стаціонарних ймовірностей переходу p_{ij} і середнього часу a_i перебування у станах e_i , ($i = \overline{0,6}$; $i \neq j$):

$$\left. \begin{aligned} p_{01} = \bar{F}(T); p_{02} = F(T); p_{10} = \frac{\theta}{\theta + \gamma_3}; p_{14} = \frac{\gamma_3}{\theta + \gamma_3}; p_{20} = \frac{\mu}{\mu + \gamma_3}; \\ p_{23} = \frac{\gamma_3}{\mu + \gamma_3}; \\ p_{30} = \frac{\mu}{\mu + \gamma}; \\ p_{35} = \frac{\gamma}{\mu + \gamma}; p_{41} = \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1}; p_{46} = \frac{\gamma_1}{\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1}; p_{50} = p_{61} = 1; \\ a_0 = \int_0^T \bar{F}(t) dt; a_1 = \frac{1}{\theta + \gamma_3}; \\ a_2 = \frac{1}{\mu + \gamma_3}; a_3 = \frac{1}{\mu + \gamma}; a_4 = \frac{1}{\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1}; a_5 = \frac{1}{\mu}; a_6 = \frac{1}{\gamma_{\text{пр}}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Після підстановки формул для p_{ij} та a_i , ($i = \overline{0,6}$; $i \neq j$) в (4), отримаємо остаточне розрахункове співвідношення для коефіцієнта технічного використання системи, що розглядається:

$$K_{\text{TB}}(T) = \frac{\int_0^T \bar{F}(t) dt + \frac{F(T)}{\mu + \gamma_3} \left(1 + \frac{\gamma_3}{\mu + \gamma}\right) + \frac{\bar{F}(T)}{\theta} \left(1 + \frac{\gamma_3}{\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1}\right)}{\int_0^T \bar{F}(t) dt + \frac{F(T)}{\mu} + \frac{\bar{F}(T)}{\theta} \left(1 + \frac{\gamma_3}{\gamma_{\text{пр}}}\right)}, \quad (6)$$

де $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$.

У формулі (6) через $F(t)$ позначену у загальному вигляді функцію розподілу напрацювання об'єкта до відмови. При конкретних видах цієї функції з формули (6) можуть бути отримані різні часткові рішення, що представляють практичний інтерес. Так, для випадку, коли $F(t)$ має експоненційний розподіл з параметром $\lambda = 1/\bar{t}_0$, маємо

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \int_0^T \bar{F}(t) dt = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T}), \quad (7)$$

а для випадку, коли $F(t)$ має розподіл Ерланга 2-го порядку з параметром $\lambda = 2/\bar{t}_H$, отримуємо

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t), \int_0^T \bar{F}(t)dt = \frac{2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T}) - Te^{-\lambda T}. \quad (8)$$

Підставляючи вирази (7) або (8) у формулу (6), отримуємо розрахункові співвідношення для коефіцієнта технічного використання:

а) для випадку експоненціального розподілу напрацювання до відмови $F(t)$:

$$K_{\text{ТВ}}(T) = \frac{(1 - e^{-\lambda T}) \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu + \gamma_3} \left(1 + \frac{\gamma_3}{\mu + \gamma_3} \right) \right] + \frac{1}{\theta} \left(1 + \frac{\gamma_3}{\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1} \right) e^{-\lambda T}}{(1 - e^{-\lambda T}) \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \right) + \frac{1}{\theta} \left(1 + \frac{\gamma_3}{\gamma_{\text{пр}}} \right) e^{-\lambda T}}; \quad (9)$$

б) для випадку, коли $F(t)$ має розподіл Ерланга 2-го порядку:

$$K_{\text{ТВ}}(T) = \frac{x + \frac{\mu + \gamma + \gamma_3}{(\mu + \gamma_3)(\mu + \gamma)} y + \left[\frac{(1 + \lambda T)(\gamma_{\text{пр}} + \gamma_3 + \gamma_1)}{\theta(\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1)} - T \right] e^{-\lambda T}}{x + \frac{1}{\mu} y + \left[\frac{(1 + \lambda T)(\gamma_3 + \gamma_{\text{пр}})}{\theta \gamma_{\text{пр}}} - T \right] e^{-\lambda T}}, \quad (10)$$

де $x = \frac{2}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T})$; $y = [1 - e^{-\lambda T}(1 + \lambda T)]$.

Отримані розрахункові співвідношення (6), (9) та (10) є цільовими функціями для оптимізації періодичності проведення обслуговування за комплексним показником надійності – коефіцієнтом технічного використання системи [5].

Отримаємо далі цільову функцію для оптимізації періодичності обслуговування за критерієм мінімуму середніх питомих витрат $\bar{C}(T)$. У розглянутій задачі середні питомі витрати $\bar{C}(T)$ можна визначити як відношення суми середніх витрат на відновлення працездатності об'єкта, виконання технічного обслуговування та приведення об'єкта в готовність з режиму обслуговування у робочий режим до середнього часу перебування системи у підмножині працездатних станів. Виходячи з цього та використовуючи граф станів та переходів системи (рис. 4.3), можна записати наступну формулу для $\bar{C}(T)$ [6]:

$$\bar{C}(T) = \frac{c_{\text{в}}(\pi_2 a_2 + \pi_3 a_3 + \pi_5 a_5) + c_{\text{то}} \pi_1 a_1 + c_{\text{пр}}(\pi_4 a_4 + \pi_6 a_6)}{\pi_0 a_0 + \pi_1 a_1 + \pi_2 a_2 + \pi_3 a_3 + \pi_4 a_4},$$

або з урахуванням виразів (3) та (5) після нескладних перетворень отримуємо:

$$\bar{C}(T) = \frac{c_{\text{в}} \frac{F(T)}{\mu} + \frac{\bar{F}(T)}{\theta} \left(c_{\text{то}} + c_{\text{пр}} \frac{\gamma_3}{\gamma_{\text{пр}}} \right)}{\int_0^T \bar{F}(t)dt + F(T) \frac{\mu + \gamma + \gamma_3}{(\mu + \gamma)(\mu + \gamma_3)} + \bar{F}(T) \frac{\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1 + \gamma_3}{\theta(\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1)}} \quad (11)$$

де $c_{\text{в}}$, $c_{\text{то}}$, $c_{\text{пр}}$ – середні витрати за одиницю часу відповідно при відновленні працездатності, при виконанні обслуговування та при переведенні об'єкта з режиму обслуговування в робочий режим.

Отримане співвідношення (11) є цільовою функцією для оптимізації періодичності обслуговування за вибраним показником вартості.

Розв'язання задачі оптимізації

Наведемо формулу (6) до такого виду:

$$K_{TB}(T) = \frac{\int_0^T \bar{F}(t)dt + F(T)(A - B) + B}{\int_0^T \bar{F}(t)dt + F(T)D + E}, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu + \gamma + \gamma_3}{(\mu + \gamma)(\mu + \gamma_3)}; \\ B &= \frac{\gamma_{nr} + \gamma_1 + \gamma_3}{\theta(\gamma_{nr} + \gamma_1)}; \\ D &= \frac{\theta\gamma_{nr} - \mu(\gamma_{nr} + \gamma_3)}{\theta\mu\gamma_{nr}}; \\ E &= \frac{\gamma_{nr} + \gamma_3}{\theta\gamma_{nr}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Формули (13) для A і B записані для випадку експоненційних розподілів величин τ_d та τ_{d1} з параметрами відповідно γ і γ_1 . У випадку вироджених функцій розподілу (величини t_d і t_{d1} – детерміновані) отримуємо

$$A = \frac{\mu + \gamma_3(1 - q)}{\mu(\mu + \gamma_3)}; \quad B = \frac{\gamma_{nr} + \gamma_3(1 - q_1)}{\theta\gamma_{nr}}, \quad (14)$$

де

$$q = P\{t_g > t_d\} = e^{-\mu t_d}; \quad q_1 = P\{t_{nr} > t_{d1}\} = e^{-\gamma_{nr} t_{d1}}. \quad (15)$$

Диференціюючи вирази (4.26) і прирівнюючи похідну нулю, отримуємо наступне рівняння для знаходження оптимального значення періодичності обслуговування:

$$\frac{E - B}{D - (A - B)} = -F(T) + \lambda(T) \left[\int_0^T \bar{F}(t)dt + \frac{DB - (A - B)E}{D - (A - B)} \right], \quad (16)$$

де коефіцієнти A , B , D , E виражаються формулами (13) – (15), а $\lambda(T)$ – інтенсивність відмов об'єкта, тобто

$$\lambda(T) = \frac{F'(T)}{\bar{F}(T)} = \frac{f(T)}{\bar{F}(T)}, \quad \bar{F}(T) = 1 - F(T).$$

Рівняння (16) є необхідною умовою для існування оптимального значення періодичності обслуговування. Проведемо дослідження питання існування коренів рівняння (16). Як видно, це рівняння структурою збігається з рівнянням (16). Тому можна стверджувати, що якщо при $T = 0$

$$\frac{E - B}{D - (A - B)} = \frac{\frac{\gamma_{nr} + \gamma_3}{\theta\gamma_{nr}} - \frac{\gamma_{nr} + \gamma_1 + \gamma_3}{\theta(\gamma_{nr} + \gamma_1)}}{\frac{\theta\gamma_{nr} - \mu(\gamma_{nr} + \gamma_3)}{\theta\mu\gamma_{nr}}} - \left[\frac{\mu + \gamma + \gamma_3}{(\mu + \lambda)(\mu + \gamma_3)} - \frac{\gamma_{nr} + \gamma_1 + \gamma_3}{\theta(\gamma_{nr} + \gamma_1)} \right] > 0, \quad (17)$$

та якщо $\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$, то рівняння (16) має хоча один корінь. У цьому можна переконатися, порівнявши ліву та праву частини рівняння при $T = 0$ і $T = \infty$.

Якщо до того ж додати умову монотонності $\lambda'(T) > 0$, то абсолютний максимум функції $K_{TB}(T)$ досягається при найменшому корені рівняння (16). А,

коли $\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$, необхідно перевірити виконання нерівності, яка є достатньою умовою існування екстремуму цільової функції (12):

$$\frac{E - B}{D - (A - B)} < \lim_{T \rightarrow \infty} V(T), \quad (18)$$

де $V(T)$ – права сторона рівняння (16).

Якщо умова (18) виконується, можна зробити висновок про доцільність проведення технічного обслуговування через кінцевий час.

Нехай T^* – точка, у якій досягається абсолютний максимум цільової функції (12). Тоді для визначення цього максимуму можна скористатися формулами:

$$\max_T K_{TB}(T) = K_{TB}(T^*) = \begin{cases} \frac{\bar{t}_0 + A}{D - (A - B)}, & T^* = \infty; \\ \frac{\bar{t}_0 + \frac{1}{\mu}}{1 + \lambda(T^*)(A - B)}, & T^* < \infty, \end{cases} \quad (19)$$

де коефіцієнти A, B, D визначаються за допомогою формул (13) – (15).

Перейдемо тепер до дослідження показника вартості $\bar{C}(T)$ – середніх витрат, що припадають на одиницю часу перебування системи у підмножину працездатних станів (формула (11)).

Перетворимо формулу (11) на наступний вид:

$$\bar{C}(T) = \frac{F(T)K + L}{\int_0^T \bar{F}(t)dt + F(T)(A - B) + B}, \quad (20)$$

де A, B визначаються за допомогою формул (13) – (15).

$$K = \frac{c_B}{\mu} - \left(\frac{c_{TO}}{\theta} + \frac{c_{пр} \gamma_3}{\theta \gamma_{пр}} \right), \quad (21)$$

$$L = \frac{c_{TO}}{\theta} + \frac{c_{пр} \gamma_3}{\theta \gamma_{пр}}. \quad (22)$$

Диференціюючи вираз (20) та прирівнюючи похідну нулю, отримуємо рівняння для визначення оптимального значення періодичності проведення обслуговування:

$$\frac{L}{K} = -F(T) + \lambda(T) \left[\int_0^T \bar{F}(t)dt + B - \frac{(A - B)L}{K} \right]. \quad (23)$$

За своєю структурою рівняння (23) збігається з рівнянням (16), тому, повторюючи попередні міркування, приходимо до наступної нерівності:

$$\frac{L}{K} < -1 + \lambda(\infty) \left[\bar{t}_H + B - \frac{(A - B)L}{K} \right], \quad (24)$$

яке є достатньою умовою існування кінцевого значення оптимальної періодичності обслуговування за показником середніх питомих витрат [7].

Якщо T_1^* – точка, в якій досягається абсолютний мінімум функції (20), то, враховуючи, що при $T_1^* \neq \infty$ величина T_1^* задовольняє рівняння (23), отримуємо:

$$\min_T \bar{C}(T) = \bar{C}(T_1^*) = \begin{cases} \frac{\frac{c_e}{\mu}}{\bar{t}_0 + A}, & T^* = \infty; \\ \frac{\lambda(T^*)K}{1 + \lambda(T^*)(A - B)}, & T^* < \infty; \end{cases} \quad (25)$$

де коефіцієнти A, B, K визначаються формулами (13) – (15) і (21).

Методика визначення оптимальної періодичності обслуговування та екстремальних значень показників якості

Вихідні данні для розрахунку: функція розподілу напрацювання t_0 об'єкта до відмови $F(t)$ (або $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$) з математичним очікуванням $\bar{t}_0$; щільність розподілу $f(t) = F'(t)$ випадкової величини t_0 ; інтенсивність відмов об'єкта $\lambda(t) = \frac{F'(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$; інтенсивність виконання технічного обслуговування $\theta = 1/\bar{t}_{\text{то}}$; інтенсивність надходження завдання γ_3 ; інтенсивність переведення об'єкта в основний (робочий) режим $\gamma_{\text{пр}} = 1/\bar{t}_{\text{пр}}$; параметр експоненціального закону розподілу допустимого часу відновлення працездатності об'єкта $\gamma = 1/\bar{t}_d$ або величина резерву часу $t_d = \text{const}$, якщо резервний час – детермінована величина; параметр експоненціального закону розподілу допустимого часу переведення об'єкта в основний (робочий) режим $\gamma_1 = 1/\bar{t}_{d1}$ або величина резерву часу $t_{d1} = \text{const}$, якщо резервний час – детермінована величина; середні витрати за одиницю часу відповідно при відновленні працездатності об'єкта c_B , при виконанні технічного обслуговування $c_{\text{то}}$ та при переведенні об'єкта в робочий режим $c_{\text{пр}}$.

Обмеження та допущення: після закінчення технічного обслуговування та відновлення працездатності система (об'єкт + резервний час) повністю оновлюється; середній час відновлення працездатності більший за середню тривалість обслуговування ($\bar{t}_B > \bar{t}_{\text{то}}$, де $\bar{t}_B = \frac{1}{\mu}$, $\bar{t}_{\text{то}} = \frac{1}{\theta}$); час виконання завдання настільки мале у порівнянні з середнім напрацюванням об'єкта до відмови, що їм можна практично нехтувати; повинні виконуватись умови:

$$D > (A - B);$$

$$\frac{c_B}{\mu} > \frac{c_{\text{то}}}{\theta} + \frac{c_{\text{пр}}\gamma_3}{\theta\gamma_{\text{пр}}}.$$

Формули для розрахунку оптимальних значень періодичності обслуговування та екстремальних значень коефіцієнта технічного використання.

1. Перевірка виконання прийнятих обмежень та допущень.
2. Перевірка достатньої умови існування оптимальної періодичності обслуговування через кінцевий час (нерівність (18)).
3. Визначення оптимального значення періодичності обслуговування T^* як кореня рівняння:

$$\frac{E - B}{D - (A - B)} = -F(T) + \lambda(T) \left[\int_0^T \bar{F}(t) dt + \frac{DB - (A - B)E}{D - (A - B)} \right], \quad (26)$$

де коефіцієнти A, B, D, E визначаються формулами (13) – (15).

Зауважимо, що якщо інтенсивність відмов об'єкта $\lambda(t)$ є необмежено зростаючою монотонною функцією (тобто $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$), то рівняння (26) має єдиний корінь.

4. Розрахунок максимального значення коефіцієнта технічного використання.

Якщо рівняння (26) має один корінь T^* , то максимальне значення коефіцієнта технічного використання визначається за формулою:

$$\max_T K_{TB}(T) = K_{TB}(T^*) = \frac{1 + \lambda(T^*)(A - B)}{1 + \lambda(T^*)D}. \quad (27)$$

Якщо рівняння немає коренів, то $T^* = \infty$ і

$$\max_T K_{TB}(T) = K_{TB}(\infty) = K_e = \frac{\bar{t}_0 + A}{\bar{t}_0 + (1/\mu)}. \quad (28)$$

Це означає, що абсолютний максимум комплексного показника надійності досягається, коли на об'єкті не проводиться технічне обслуговування. Цей показник є коефіцієнтом готовності системи K_r . Якщо рівняння (26) має кілька коренів $T_1^*, T_2^*, \dots, T_k^*$, то значення оптимальної періодичності буде чисельно дорівнює одному з цих коренів або $T^* = \infty$ в залежності від того, в якій точці досягається абсолютний максимум функції $K_{TB}(T^*)$. Це легко з'ясувати порівнянням величин $K_{TB}(T_i^*)$, $i = 1, 2, \dots, k$, та $K_{TB}(\infty)$.

Формули для розрахунку оптимальних значень періодичності обслуговування T^* та мінімальних значень середніх питомих витрат.

Перевірка виконання прийнятих обмежень та допущень.

Перевірка виконання нерівності:

$$\frac{\frac{C_{TO}}{\theta} + \frac{C_{ПГ\lambda_3}}{\theta\gamma_{ПГ}}}{\frac{C_e}{\mu} - \left(\frac{C_{TO}}{\theta} + \frac{C_{ПГ\lambda_3}}{\theta\gamma_{ПГ}} \right)} < -1 + \lambda(\infty) \left[\bar{t}_0 + B - \frac{L(A - B)}{K} \right], \quad (29)$$

яка є достатньою умовою існування екстремуму (мінімуму) цільової функції (20). Виконання цієї нерівності свідчить про те, що оптимальна періодичність обслуговування T_1^* має кінцеве значення.

Визначення оптимального значення періодичності T_1^* як кореня рівняння:

$$\frac{\frac{C_{TO}}{\theta} + \frac{C_{ПГ\lambda_3}}{\theta\gamma_{ПГ}}}{\frac{C_e}{\mu} - \left(\frac{C_{TO}}{\theta} + \frac{C_{ПГ\lambda_3}}{\theta\gamma_{ПГ}} \right)} = -F(T) + \lambda(T) \left[\int_0^T \bar{F}(t) dt + B - \frac{(A - B)L}{K} \right], \quad (30)$$

де коефіцієнти A, B, K, L визначаються формулами (13) – (15), (21), (22).

Якщо рівняння має один корінь T_1^* , то мінімальне значення середніх питомих витрат визначається за допомогою виразу:

$$\min_T \bar{C}(T) = \bar{C}(T_1^*) = \frac{\lambda(T_1^*) \left[\frac{c_{\text{в}}}{\mu} - \left(\frac{c_{\text{то}}}{\theta} + \frac{c_{\text{пр}} \gamma_3}{\theta \gamma_{\text{пр}}} \right) \right]}{1 + \lambda(T_1^*)(A + B)}. \quad (31)$$

Якщо рівняння (30) немає коренів, то $T_1^* = \infty$ і

$$\min_T \bar{C}(T) = \bar{C}(\infty) = \frac{c_{\text{в}}/\mu}{\bar{t}_0 + A}. \quad (32)$$

Це відповідає випадку, коли технічне обслуговування об'єкта проводити недоцільно. Якщо рівняння (30) має кілька коренів, то значення оптимальної періодичності обслуговування буде чисельно дорівнювати одному з них в залежності від того, в якій точці досягається абсолютний мінімум функції $\bar{C}(T^*)$ [7].

Зауважимо, що формули (27) і (31) для розрахунку екстремальних значень показників якості $K_{\text{ТВ}}(T^*)$ та $\bar{C}(T_1^*)$ отримані за умови, що оптимальні значення періодичності обслуговування T^* і T_1^* задовольняють рівнянням відповідно (26) та (30).

Числовий приклад. Розглянемо систему, що характеризується такими даними: напрацювання об'єкта до відмови розподілено за законом Ерланга 2-го порядку $F(T) = 1 - [\exp(-\lambda t)](1 + \lambda t)$ з параметром $\lambda = 0,01 \text{ год}^{-1}$; щільність розподілу напрацювання до відмови $f(t) = F'(t) = \lambda^2 t \exp(-\lambda t)$; інтенсивність відмов об'єкта $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \frac{\lambda^2 t}{1+\lambda t}$; інтенсивність відновлення працездатності об'єкта $\mu = 1/\bar{t}_{\text{в}} = 1/6 \text{ год}^{-1}$ та виконання технічного обслуговування $\theta = 1/\bar{t}_{\text{то}} = 1/4 \text{ год}^{-1}$; інтенсивність переведення об'єкта в основний (робочий) режим $\gamma_{\text{пр}} = 1/\bar{t}_{\text{пр}} = 1,0 \text{ год}^{-1}$; інтенсивність надходження завдань $\gamma_3 = 0,5 \text{ год}^{-1}$; значення $\gamma = 1/\bar{t}_{\text{д}} = 0,5 \text{ год}^{-1}$ та $\gamma_1 = 1/\bar{t}_{\text{д1}} = 0,5 \text{ год}^{-1}$; середні витрати за одиницю часу при відновленні працездатності $c_{\text{в}} = 50 \text{ у.о./год}$, при виконанні обслуговування $c_{\text{то}} = 20 \text{ у.о./год}$ та при переведенні об'єкта в робочий режим $c_{\text{пр}} = 10 \text{ у.о./год}$.

Для цих вихідних даних визначимо оптимальні значення періодичності проведення технічного обслуговування та відповідні їм екстремальні значення показників надійності $K_{\text{ТВ}}(T^*)$ та середніх питомих витрат $\bar{C}(T_1^*)$.

Рішення. Підставляємо вихідні дані до рівняння (26) та отримуємо:

$$1,25 = V(T), \quad (33)$$

де через $V(T)$ позначено функцію

$$V(T) = e^{-0,01T}(1 + 0,01T) + \frac{10^{-4}T}{1 + 0,01T} \times [200(1 - e^{-0,01T}) - Te^{-0,01T} + 6]. \quad (34)$$

Оскільки для прийнятих вихідних даних $\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda(T) < \infty$, то перевіряємо достатню умову існування екстремуму функції (12): $1,25 < \lim_{T \rightarrow \infty} V(T) = 2,06$.

Отже, рівняння (33) має єдиний кінцевий корінь, який визначаємо за графіком функції $V(T)$, стоїть у правій частині рівняння, що наведено на рис. 2.

Для прийнятих вихідних даних оптимальне значення періодичності проведення обслуговування $T^* = 100$ ч.

Знаходимо максимальне значення коефіцієнта технічного використання за формулою (27):

$$K_{\text{ТВ}}(T^*) = \frac{1 + \lambda(T^*) \left[\frac{\mu + \gamma + \gamma_3}{(\mu + \gamma)(\mu + \gamma_3)} - \frac{\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1 + \gamma_3}{\theta(\gamma_{\text{пр}} + \gamma_1)} \right]}{1 + \lambda(T^*) \left[\frac{\theta\gamma_{\text{пр}} - \mu(\gamma_{\text{пр}} + \gamma_3)}{\theta\mu\gamma_{\text{пр}}} \right]}$$

$$= \frac{1 + \frac{10^{-4} \cdot 100}{1 + 10^{-2} \cdot 100} \left[\frac{0,17 + 0,5 + 0,5}{(0,17 + 0,5)(0,17 + 0,5)} - \frac{1,0 + 0,5 + 0,5}{0,25(1,0 + 0,5)} \right]}{1 + \frac{10^{-4} \cdot 100}{1 + 10^{-2} \cdot 100} \frac{1,0 \cdot 0,25 - 0,17(1,0 + 0,5)}{0,17 \cdot 1,0 \cdot 0,25}}$$

$$= 0,992.$$

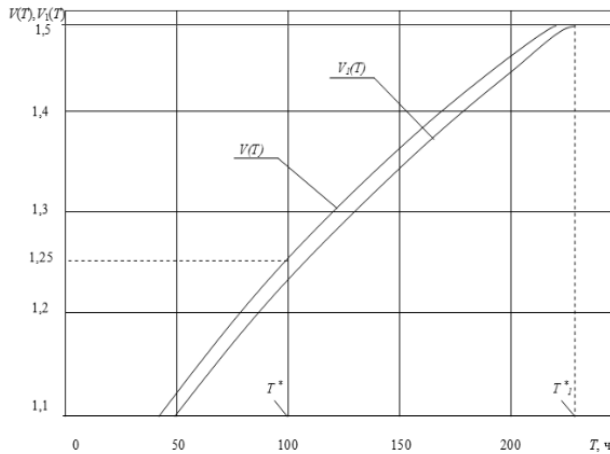


Рис. 2. Графічне визначення оптимальних значень періодичності технічного обслуговування

В результаті отримаємо: для порівняння наведемо величину коефіцієнта технічного використання для випадку, коли обслуговування не проводиться ($T^* = \infty$):

$$K_{\text{ТВ}}(\infty) = K_e = \frac{\bar{t}_0 + \frac{\mu + \gamma + \gamma_3}{(\mu + \gamma)(\mu + \gamma_3)}}{\bar{t}_0 + (1/\mu)} = \frac{200 + \frac{0,17 + 0,5 + 0,5}{(0,17 + 0,5)(0,17 + 0,5)}}{200 + 6} = 0,988.$$

Далі визначаємо оптимальне значення періодичності обслуговування, у якому забезпечується мінімальне значення середніх питомих витрат. Підставляючи вихідні дані рівняння (30), отримуємо:

$$1,5 = V_1(T), \quad (35)$$

де

$$V_1(T) = e^{-0,01T}(1 + 0,01T) + \frac{10^{-4}T}{1 + 0,01T} [200(1 - e^{-0,01T}) - Te^{-0,01T} + 6,69].$$

Перевіряємо далі виконання достатньої умови існування екстремуму функції (20)

$$1,5 < \lim_{T \rightarrow \infty} V_1(T) = 2,0669. \quad (36)$$

З нерівності (36) випливає, що рівняння (35) має один корінь, який можна визначити за графіком функції $V_1(T)$ (рис. 2). Для прийнятих вихідних даних оптимальне значення періодичності проведення обслуговування $T_1^* = 240$ год. Для розрахунку мінімального значення середніх питомих витрат $\bar{C}(T_1^*)$ скористаємося формулою (31), в яку підставимо значення

$$\lambda(T_1^*) = \frac{\lambda^2 T_1^*}{(1 + \lambda T_1^*)},$$

тоді

$$\bar{C}(T_1^*) = \frac{\frac{\lambda^2 T_1^*}{1 + \lambda T_1^*} \left[\frac{C_e}{\mu} - \left(\frac{C_{то}}{\theta} + \frac{C_{пг\gamma_3}}{\theta \gamma_{пг}} \right) \right]}{1 + \frac{\lambda^2 T_1^*}{1 + \lambda T_1^*} \left[\frac{\mu + \gamma + \gamma_3}{(\mu + \gamma)(\mu + \gamma_3)} - \frac{\gamma_{пг} + \gamma_1 + \gamma_3}{\theta(\gamma_{пг} + \gamma_1)} \right]} = 1,46 \text{ у.о./год.}$$

Для порівняння наведемо величину середніх питомих витрат на випадок, коли в системі не проводиться обслуговування ($T_1^* = \infty$):

$$\bar{C}(\infty) = \frac{\frac{C_e}{\mu}}{\bar{t}_0 + \frac{\mu + \gamma + \gamma_3}{(\mu + \gamma)(\mu + \gamma_3)}} = \frac{50 \cdot 6}{200 + \frac{0,17 + 0,5 + 0,5}{(0,17 + 0,5)(0,17 + 0,5)}} = 1,481 \text{ у.о./год.}$$

Проведемо аналіз деяких результатів теоретичного дослідження коефіцієнта технічного використання $K_{тв}(T)$ системи короткочасної дії з перериванням обслуговування, що розкладається і в якій передбачена часова надлишковість та періодичне обслуговування.

На рис. 3 та 4 наведено графіки залежності коефіцієнта технічного обслуговування від періодичності обслуговування T при різних значеннях $\gamma_{пг} t_{д1}$ (рис. 3) та при різних значеннях інтенсивності відмов λ (рис. 4). Суцільні криві відповідають випадку, коли напрацювання об'єкта до відмови t_0 розподілено згідно із законом Ерланга 2-го порядку, а пунктирні – випадку експоненційного розподілу випадкової величини t_0 (розрахунки проводилися на однакових математичних очікуваннях напрацювання до відмови).

З рисунка 3 видно, що збільшення інтенсивності $\gamma_{пг}$ переведення об'єкта з режиму обслуговування в основний режим (у разі збільшення $\gamma_{пг} t_{д1}$ та $t_{д1} = \text{const}$) всього вдвічі призводить до суттєвого підвищення ефективності технічного обслуговування.

При цьому оптимальне значення періодичності обслуговування зміщується вліво по осі абсцис. Це пояснюється тим, що зі збільшенням $\gamma_{пг} t_{д1}$ простої системи за рахунок проведення обслуговування все більшою мірою компенсуються існуючим у системі резервом часу, тоді як величина компенсації простоїв при відновленні працездатності об'єкта не змінюється. У разі, коли значення $\lambda T \rightarrow \infty$ (при $\lambda = \text{const}$), у системі проводиться лише

відновлення працездатності після відмов і всі шість кривих (рис. 3) асимптотично прагнуть значення стаціонарного коефіцієнта готовності системи K_e , у якій не проводиться технічне обслуговування.

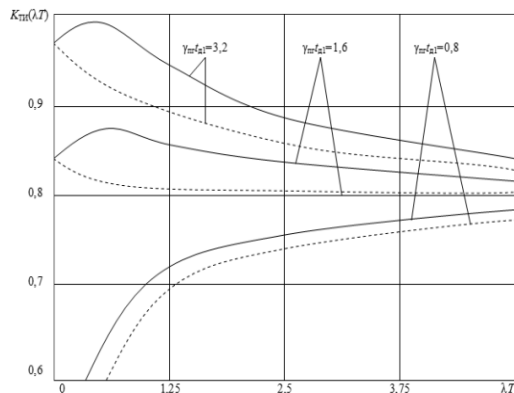


Рис. 3. Графіки залежності коефіцієнта технічного використання від λT при різних значеннях $\gamma_{\pi}t_{D1}$ при $\mu/\theta = 1$, $\gamma_3\theta = 1$ (у разі розподілу t_0 за законом Ерланга 2-го порядку; у разі розподілу t_0 за експоненціальним законом)

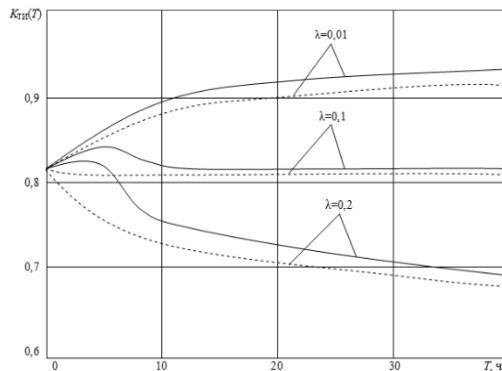


Рис. 4. Графіки залежності коефіцієнта технічного використання від періодичності обслуговування при різних значеннях λ при $\mu/\theta = 1$, $\gamma_{\pi}t_{D1} = 1.6$, $\gamma_3\theta = 1$ (у разі розподілу t_0 за законом Ерланга 2-го порядку; у разі розподілу t_0 за експоненціальним законом)

З рис. 4 видно, що на величину коефіцієнта технічного використання значний вплив має також і інтенсивність відмов λ об'єкта, що розглядається. Зі зменшенням λ оптимальна періодичність обслуговування зміщується вправо по осі абсцис, при цьому криві в області максимальних значень $K_{TB}(T)$ стають більш пологими.

Висновки

Аналіз графіків показує, що при однакових значеннях часу виконання обслуговування та відновлення працездатності об'єкта $\mu/\theta = 1$ розглянута стратегія обслуговування забезпечує досить високу ефективність видів відновлювальних робіт, а значення коефіцієнта технічного використання істотно залежить від співвідношення параметрів $\gamma_{\pi}t_{D1}$, γ_3/μ , γ_3/γ_{π} , які визначають величину резерву часу та ефективність його використання.

Значний інтерес представляє дослідження впливу виду закону розподілу напрацювання до відмови $F(t)$ на значення коефіцієнта технічного використання. Графіки, зображені на рис. 3 і 4 показують, що у разі розподілу випадкової величини t_0 за експоненціальним законом (пунктирні криві) та за законом Ерланга 2-го порядку (суцільні криві) при одних і тих же значеннях параметрів форма кривих $K_{TB}(T)$ різна. При цьому для закону Ерланга 2-го

порядку за певних значень параметрів існує екстремальне значення коефіцієнта технічного використання при зміні значень періодичності обслуговування всередині інтервалу $[0, \infty)$, у той час як екстремальне значення у разі експоненціального розподілу досягається на краях цього інтервалу. Експоненціальний розподіл випадкової величини дає нижню оцінку комплексного показника надійності, що розглядається.

Література

1. ДСТУ 2860-94. Надійність техніки. Терміни та визначення. Держстандарт України [Електронний ресурс]. – http://www.ksv.biz.ua/publ/dstu/dstu_2860_94/3-1-0-1102.
2. Стойкова, Л.С. Обобщенные неравенства Чебышева и их применение в математической теории надежности [Текст] / Л.С. Стойкова // Кибернетика и системный анализ. – 2010. - № 3. – С. 139 – 143.
3. Нетес, В.А. Надежность сетей связи в стандартах МЭК [Текст] / В.А. Нетес // Вестник связи. – 2014. - № 2. – С. 13 – 15.
4. Dieves V. Dependability in Future Battle Network System – Transport Layer Ability to Maintain Quality of Service [Текст] / V. Dieves // Wireless Sensor Network. – 2016. - № 08, Iss. 10. – P. 211–228. DOI: <https://doi.org/10.4236/wsn.2016.810017>.
5. Jin, Y. Estimating Component Reliability Based on Failure Time Data from a System of Unknown Design [Текст] / Y. Jin, P. Hall, J. Jiang, F. Samaniego // Statistica Sinica. – 2017. – № 27. – 479-499 p. DOI:<http://dx.doi.org/10.5705/ss.202015.0209>.
6. Zhu, P. Reliability and Criticality Analysis of Communication Networks by Stochastic Computation [Текст] / P.Zhu, J. Han, Y.Guo, F. Lombardi // IEEE Network. – 2016. - №30, Iss. 6. – P. 70-76. DOI: <https://doi.org/10.1109/mnet.2016.1500221nm>
7. Mogylevych, D. Comprehensive Reliability Assessment Technique of Telecommunication Networks Equipment with Reducible Structure [Текст] / D. Mogylevych, I. Kononova, B. Kredentser, I. Karadschow // Вісник НТУУ "КПІ". Серія Радіотехніка. Радіоапаратобудування. –2020. - № 80, – С. 39 – 47. DOI: <https://doi.org/10.20535/RADAP.2020.80.39-47>.

References

1. DSTU 2860-94. Nadiinist tekhniky. Terminy ta vyznachennia. Derzhstandart Ukrainy. [Elektronnyi resurs]. – http://www.ksv.biz.ua/publ/dstu/dstu_2860_94/3-1-0-1102.
2. Stoikova, L.S. Obobshchennyye neravenstva Chebysheva y ykh prymerenye v matematycheskoi teoryi nadezhnosti [Tekst] / L.S. Stoikova // Kybernetyka y systemnyi analiz. – 2010. - № 3. – S. 139 – 143.
3. Netes, V.A. Nadezhnost setei sviazy v standartah MEK [Tekst] / V.A. Netes // Vestnyk sviazy. – 2014. - № 2. – S. 13 – 15.
4. Dieves V. Dependability in Future Battle Network System – Transport Layer Ability to Maintain Quality of Service [Tekst] / V. Dieves // Wireless Sensor Network. – 2016. - № 08, Iss. 10. – P. 211–228. DOI: <https://doi.org/10.4236/wsn.2016.810017>.
5. Jin Y. Estimating Component Reliability Based on Failure Time Data from a System of Unknown Design. Statistica Sinica [Tekst] / Y. Jin, P. Hall, J. Jiang, Samaniego// Statistica Sinica. – 2017. – № 27, 479-499 p. DOI:<http://dx.doi.org/10.5705/ss.202015.0209>.
6. Zhu, P. Reliability and Criticality Analysis of Communication Networks by Stochastic Computation. P.Zhu, J. Han, Y.Guo, F. Lombardi // IEEE Network. – 2016. - №30, Iss. 6. – P. 70-76. DOI: <https://doi.org/10.1109/mnet.2016.1500221nm>
7. Mogylevych, D. Comprehensive Reliability Assessment Technique of Telecommunication Networks Equipment with Reducible Structure [Tekst] / D. Mogylevych, I. Kononova, B. Kredentser, I. Karadschow // Visnyk NTUU KPI Seriya – Radiotekhnika Radioaparatobuduvannia. –2020. - № 80, – С. 39 – 47. DOI: <https://doi.org/10.20535/RADAP.2020.80.39-47>.