

Левченко В.В., к.ф.-м. н., доц. Державний університет інфраструктури і технологій, Київ, Україна. ylvv@ukr.net

Павленко В.І., к.ф.-м. н., доц. Університет «Україна», Київ, Україна. pavlenko.v@i.ua

Анотація: Дано постановку та розв'язано задачу про спектр і форми коливань об'ємних пружних хвиль у регулярно - шаруватому середовищі. Отримано дисперсійні співвідношення, які дозволяють повторення хвильових полів з довільним значенням періоду структури. Проведено порівняння спектрів дисперсійних кривих об'ємних і нормальних хвиль у регулярно – шаруватій пластині. Отримані дисперсійні співвідношення аналізувалися також чисельно, а результати наведено у вигляді графіків. Побудовано моди коливань для широкого спектру дисперсійних кривих.

Ключові слова: об'ємні хвилі здвигу, дисперсійні співвідношення, регулярно шарувате середовище, моди коливань, зони пропускання.

SPECTRUM OF BODY SHEAR WAVES IN A REGULAR LAYERED SPACE

Vladimir Levchenko , Ph.D., Ass. Prof. State University of Infrastructure and Technology, Kyiv, Ukraine, ylvv@ukr.net

Vladimir Pavlenko., Ph.D. n., Ass. Prof. University "Ukraine", Kyiv, Ukraine, pavlenko.v@i.ua

Abstract: The problem of propagation of waves of different physical nature in periodic and inhomogeneous structures is the subject of a large number of scientific papers . The main direction of research was the study of the dispersion characteristics of inhomogeneous structures. In periodic media, the conditions for the existence of bulk waves and the nature of the transmission zones were studied. Dispersion properties and the nature of oscillations of body waves in media with a periodic structure are currently insufficiently studied. Partial Given the setting and solved the problem of spectrum and volume fluctuations form of elastic waves in the regularly - stratified environment. Retrieved dispersion relations that allow repetition wave fields in an arbitrary period structure. A comparison of the spectra of dispersion curves and volume of normal waves in regularly - layered plate. Dispersion relations are obtained for normal and bulk waves. The form of the obtained dispersion relations made it possible to conclude that the dispersion curves for body waves, with the exception of the boundaries of the transmission zones, coincide with the dispersion curves for normal waves in regular-layered platinum with stress-free external surfacesThe resulting dispersion relations also numerically analyzed, and the results are presented in graphs. Powered fashion fluctuations for a wide range of dispersion curves. As follows from the results of the research, the oscillation modes have different symmetry for an even value and an odd number of repeating generating packets. Most of the nodal points of oscillations are localized in the layer with the minimum velocity. It is shown that the modes of oscillations are strongly dependent on the value of the indices on the number of the transmission zone.

Key words: volume shear wave, dispersion relations, regularly layered medium, mode shapes, border zones passing.

Вступ

Припустимо, що є шарувата структура утворена періодичним повторенням вздовж осі пакета Q шарів товщини h_q ($q = 1, \dots, Q$). Пакет складається з Q шарів товщини h_q ($q = 1, \dots, Q$). Властивості

 λ_q, μ_q та щільністю ρ_q . На поверхнях розділу
$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \quad \sigma_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \sigma_{yz} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1)$$

Вважатимемо, що шари однорідні вздовж напрямків Ox і Oy . Матеріальні параметри є періодичними функціями змінної z з періодом h . Залежність полів від координати і часу описуватимемо залежністю $(\exp[i(kx - \omega t)])(k$ - стала поширення, ω - циклічна частота).

Виконання досліджень

Рішення системи рівнянь (1) щодо кожного з шарів простору шукаємо у вигляді:

$$u(x, z, t) = [B_{(n-1)O+q}^{(1)} \sin \Omega_q (z - z_{n,q}) + B_{(n-1)O+q}^{(2)} \cos \Omega_q (z - z_{n,q})], \quad (2)$$

$$\text{де } z_{n,q-1} < z < z_{n,q}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad z_{n,q} = (n-1)h + h_1 + h_q, \quad h = h_1 + h_2 + h_0.$$

Підставляючи рішення (2) в умови на межах розділу властивостей вихідне завдання зведемо до нескінченної системи рівнянь алгебри:

$$\begin{aligned}
N(a_1, 0)B_{(n-1)Q+1} &= N(a_2, \theta_2)B_{(n-1)Q+2}; \\
N(a_{Q-1}, 0)B_{(n-1)Q+Q-1} &= N(a_Q, \theta_Q)B_{nQ}; \\
N(a_Q, 0)B_{nQ} &= N(a_1, \theta_1)B_{nQ+1}.
\end{aligned}
\tag{3}$$

Матриці $N(a_i, \theta_i)$, $N(a_i, 0)$, векторні стовпці $N(a_i, \theta_i)$, $N(a_i, 0)$ та позначення, що використовуються в системі (3), збігаються з введеними в [4]

Рішення системи (3) в регулярно-шаровому напівпросторі будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned} \vec{B}_{(n-1)Q+1} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n (N_Q)^{M-1} N^{-1}(a_q; 0) \prod_{q=2}^Q N(a_q; \theta_q) N^{-1}(a_q; 0) Y_j, \\ \vec{B}_{(n-1)Q+Q-1} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n (N_Q)^{M-1} N^{-1}(a_{(n-1)Q+Q-1}; 0) N(a_q; \theta_q) N^{-1}(a_q; 0) Y_j, \\ \vec{B}_{nQ} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n (N_Q)^{M-1} N^{-1}(a_q; 0) Y_j. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут χ_j – характеристичні числа та власні вектори передавальної матриці $N_{MQ} = (N_Q)^M$, де $N_Q = \prod_{q=1}^Q N^{-1}(a_q; 0) N(a_q; \theta_q)$, $M = 1, 2$, Характеристичне рівняння матриці N_{MQ} є зворотним [4,9-11] і має вигляд:

$$\chi^2 - 2b_{MQ}\chi + 1 = 0, \quad (5)$$

де $b_{MQ} = \text{spur} N_{MQ} / 2$.

Виходячи з виду дисперсійного рівняння (5) при $M = 1$, за умови існування об'ємних хвиль запишеться $b_Q \leq 1$. Межі зон пропускання будуть дисперсійними співвідношеннями для об'ємних хвиль зсув:

$$b_Q = 1 \quad (6)$$

відповідає коливанням період повторення, яких збігається з періодом структури, а коливання на межі:

$$b_Q = -1 \quad (7)$$

повторюються з періодом $2h$.

Поклавши $Q = 2$, а розв'язання хвильових рівнянь вибравши у вигляді:

$$u(x, z, t) = [B_{2n-1}^{(1)} \sin \Omega_1(z - z_{2n-1} + h_1/2) + B_{2n-1}^{(2)} \cos \Omega_1(z - z_{2n-1} + h_1/2)]; \quad (8)$$

$$z_{2n-2} < z < z_{2n-1};$$

на підставі умов сполучення між шарами отримаємо систему однорідних рівнянь алгебри:

$$\begin{aligned} N(a_1, -\theta_1/2) \vec{B}_{2n-1} &= N(a_2, \theta_2/2) \vec{B}_{2n}; \\ N(a_2, -\theta_2/2) \vec{B}_{2n} &= N(a_1, \theta_1/2) \vec{B}_{2n+1}. \end{aligned} \quad (9)$$

На границях рівнянь: $b_2 = 1$ нескінченна система рівнянь (9) зводиться до двох незалежних систем

$$\begin{aligned} B_1^{(1)} \sin(\theta_1/2) + B_2^{(1)} \sin(\theta_2/2) &= 0; \\ R_1^{(1)} \alpha_1 \cos(\theta_1/2) - B_2^{(1)} a_2 \cos(\theta_2/2) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B_1^{(2)} \cos(\theta_1/2) - B_2^{(2)} \cos(\theta_2/2) &= 0; \\ R_1^{(2)} \alpha_1 \sin(\theta_1/2) + B_2^{(2)} a_2 \sin(\theta_2/2) &= 0. \end{aligned}$$

Такий вид систем рівнянь (10) дозволяє показати, що на границях зон відбуваються антисиметричні — антисиметричні $b_2 = 1$ пропускання (AA) коливання:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= [B_{2n-1}^{(1)} \sin \Omega_1 (z - z_{2n-1} + h_1 / 2)]; & 0 < z < h_1; \\ u(x, z, t) &= [B_{2n}^{(1)} \sin \Omega_2 (z - z_{2n} + h_2 / 2)]; & h_1 < z < h. \end{aligned}$$

і симетричні-симетричні (SS) коливання щодо серединних площин шарів:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= [B_{2n-1}^{(1)} \cos \Omega_1 (z - z_{2n-1} + h_1 / 2)]; & 0 < z < h_1; \\ u(x, z, t) &= [B_{2n}^{(1)} \cos \Omega_2 (z - z_{2n} + h_2 / 2)]; & h_1 < z < h. \end{aligned}$$

На границях зон пропускання, для яких $b_2 = 1$, постійні B_{2n-1} та B_{2n} пов'язані співвідношеннями:

$$B_{2n+1} = B_{2n-1}, \quad B_{2n+2} = B_{2n}$$

На частотах, що визначаються з рівняння (7), постійні B_{2n-1} та B_{2n} пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{aligned} &= B_{-3} = -B_{-1} = B_1 = -B_3 = \dots; \\ &= B_{-4} = -B_{-2} = B_0 = -B_2 = B_4 \end{aligned}$$

і період коливань становить $2h$, нескінченна система рівнянь (9) зводиться до наступних незалежних систем рівнянь:

$$\begin{aligned} B_1^{(1)} \sin(\theta_1 / 2) - B_2^{(1)} \cos(\theta_2 / 2) &= 0; \\ R_1^{(1)} \alpha_1 \cos(\theta_1 / 2) - B_2^{(1)} a_2 \sin(\theta_2 / 2) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B_1^{(2)} \cos(\theta_1 / 2) + B_2^{(2)} \sin(\theta_2 / 2) &= 0; \\ R_1^{(2)} \alpha_1 \sin(\theta_1 / 2) + B_2^{(2)} a_2 \cos(\theta_2 / 2) &= 0. \end{aligned}$$

Виходячи з систем (11) можна показати, що на частотах, що відповідають симетрії коливань щодо серединних площин шарів $b_2 = -1$, має місце ASAS на товщині $2h$:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= [B_{2n-1}^{(1)} \sin \Omega_1 (z - z_{2n-1} + h_1 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); & 0 < z < h_1; \\ u(x, z, t) &= [B_{2n}^{(1)} \cos \Omega_2 (z - z_{2n} + h_2 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); & h_1 < z < h \\ u(x, z, t) &= [B_{2n+1}^{(1)} \sin \Omega_1 (z - z_{2n+1} + h_1 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); & h < z < h + h_1; \\ u(x, z, t) &= [B_{2(n+2)}^{(1)} \cos \Omega_2 (z - z_{2n+2} + h_2 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); & h + h_1 < z < 2h \end{aligned}$$

або SASA

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= [B_{2n-1}^{(1)} \cos \Omega_1 (z - z_{2n-1} + h_1 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); & 0 < z < h_1; \\ u(x, z, t) &= [B_{2n}^{(1)} \sin \Omega_2 (z - z_{2n} + h_2 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); & h_1 < z < h \\ u(x, z, t) &= [B_{2n+1}^{(1)} \cos \Omega_1 (z - z_{2n+1} + h_1 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); & h < z < h + h_1; \\ u(x, z, t) &= [B_{2(n+2)}^{(1)} \sin \Omega_2 (z - z_{2n+2} + h_2 / 2)] \exp(i(kx - \omega t)); & h + h_1 < z < 2h. \end{aligned}$$

Щоб отримати дисперсійні співвідношення для об'ємних хвиль, у загальному випадку розглянемо характеристичне рівняння (5). З огляду на характеристичне рівняння, дисперсійне рівняння для об'ємних хвиль у цьому разі можна записати:

$$(b_{MQ} - 1)(b_{MQ} + 1) = 0 \quad (12)$$

Використовуючи формулу Абелеса [1,5]:

$$(N_{\varrho})^m = \left\{ \begin{array}{l} N_{\varrho}^{11} U_{m-1}^{(b_{\varrho})} - U_{m-2}^{(b_{\varrho})} \\ N_{\varrho}^{21} U_{m-1}^{(b_{\varrho})} - U_{m-2}^{(b_{\varrho})} \end{array} \right\},$$

дисперсійне рівняння (12) можна подати у вигляді:

$$(b_{\varrho} U_{M-1}(b_{\varrho}) - U_{M-2}(b_{\varrho}) - 1)(b_{\varrho} U_{M-1}(b_{\varrho}) - U_{M-2}(b_{\varrho}) - 1) = 0, \quad (13)$$

де $U_M(b_{\varrho})$ — поліноми Чебишева. Виконавши ряд перетворень і скориставшись унімодулярністю матриці N_{MQ} дисперсійне співвідношення (13) можна звести до вигляду:

$$(b_{\varrho}^2 - 1)U_{M-1}(b_{\varrho}) = 0. \quad (14)$$

Скориставшись властивостями поліномів Чебишева [1] співвідношення (14) можна звести до простішого рівняння, яке допускає його аналіз:

$$(b_{\varrho} + 1)(b_{\varrho} - 1)(b_{\varrho} - \cos \frac{\pi}{M})(b_{\varrho} - \cos \frac{2\pi}{M}) \dots (b_{\varrho} - \cos \frac{(M-1)\pi}{M}) = 0. \quad (15)$$

Такий запис дозволяє зробити висновок, що дисперсійні криві для об'ємних хвиль локалізовані в зонах пропускання хвиль. Для кращого розуміння характеру дисперсійних співвідношень для об'ємних хвиль розглянемо нормальні хвилі в регулярно-шаруватій пластині, що складається з пакетів M породжуючих пакетів. Граничні поверхні пластини $z = 0$ і $z = Mh$ вільні від напруги. Підстановка рішень (2) в умови сполучення на площинах розриву властивостей дозволяє звести завдання до системи однорідних рівнянь щодо невідомих $B_p^{(j)}$

($j = 1, 2; p = 1, 2, \dots, MQ$):

$$\begin{aligned} N_1(a_1, \theta_1) B_1 &= 0; \\ N(a_1, 0) B_{(n-1)Q+1} &= N(a_2, \theta_2) B_{(n-1)Q+2}; \\ N(a_{Q-1}, 0) B_{(n-1)Q+Q-1} &= N(a_Q, \theta_Q) B_{(n-1)Q+Q}; \\ N_Q(a_Q, 0) B_{MQ} &= 0; \\ n &= 1, \dots, M; \end{aligned} \quad (16)$$

Тут введено вектор рядки

Ввівши в систему (16) заміну невідомих за формулою:

$$C_{(n-1)Q+q} = N(a_q, 0) B_{(n-1)Q+q}, \text{ систему}$$

рівнянь (16) у нових змінних можна записати так:

$$\begin{aligned}
\vec{N}(a_1, \theta_1) N(a_1, 0) \vec{C}_1 &= 0; \\
C_{(n-1)Q+1} &= N(a_2, \theta_2) N^{-1}(a_2, 0) \vec{C}_2; \\
C_{(n-1)Q+Q-1} &= N(a_q, \theta_q) N^{-1}(a_q, 0) \vec{C}_O; \\
\vec{N}(a_Q, 0) N^{-1}(a_Q, 0) C_{LQ} &= 0.
\end{aligned}
\tag{17}$$

В результаті рекурентних перетворень система (17) зведеться до вигляду $N_{MQ}^{12} \vec{C}_1^{12} = 0$ тут $N_{MQ} = (N_Q)^M$. З вимоги існування нетривіального вирішення системи (17) та, використовуючи властивості поліномів Чебишева, знаходимо дисперсійні рівняння для нормальних хвиль зсуву у пластині:

$$\begin{aligned}
N_Q^{12} &= 0; \\
(b_Q - \cos \frac{\pi}{M})(b_Q - \cos \frac{2\pi}{M}) \dots (b_Q - \cos \frac{(M-1)\pi}{M}) &= 0.
\end{aligned}
\tag{18}$$

Такий запис дисперсійних співвідношень дозволяє сказати, що дисперсійні криві, що визначаються другим співвідношенням (18), збігаються з дисперсійними кривими для об'ємних хвиль, які локалізовані в зонах пропускання.

При фіксованому M рівняння (15) мають $M-1$ корінь у кожному з діапазонів, де виконується умова $|b_Q| < 1$. Кожне з рішень рівняння $b_Q = \cos(m\pi / M)$ у загальному випадку може бути охарактеризовано трьома індексами (l, m, M) , де $m = 1, 2, \dots, M-1$, а l порядковий номер зони пропускання у разі зростання частоти від нуля. Відповідно цими ж індексами можуть бути охарактеризовані і типи коливань у періодичних структурах. Зазначимо, що типи коливань (l, m, M) та (l, rm, rM) є еквівалентними. Рішення рівнянь $b_Q = 1$; $b_Q = -1$ характеризуватимемо індексами t і s , де s приймає два значення -1 або 1 відповідно до виду границі, а t порядковий номер рішення рівняння (6) або (7).

Аналіз чисельних результатів

Аналіз, отриманих дисперсійних співвідношень, у загальному випадку можливий лише чисельно. Нижче наведено результати чисельного аналізу для $Q = 2$ і $h_1 = h_2$. Як матеріали породжуючого пакету розглядалися CdS та ZnO [9]. Властивості шару з $q = 1$ збігалися з властивостями CdS.

На рис. 1 в безрозмірних координатах $(z/h, u(z)/u(0))$ представлені форми коливань границь зон пропускання. У нижній частині малюнків у дужках наведено значення безрозмірних величин $k^* = kh$ і $\omega^* = \omega h \sqrt{\rho_0 \lambda_0}$ ($\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3$), для яких проводився аналіз форм коливань, а верхній — значення індексів t і s .

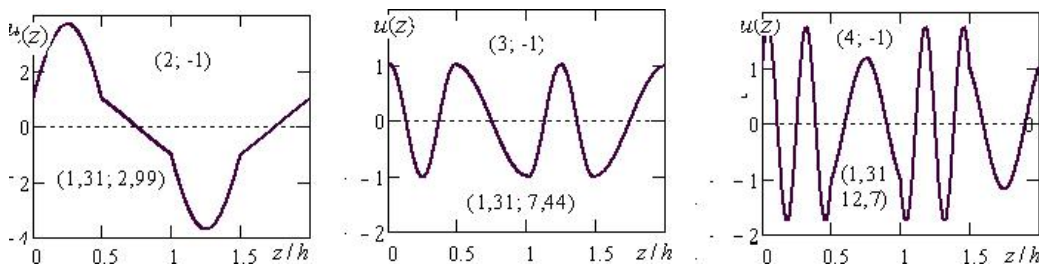


Рис. 1. Форми коливань на границях зон пропускання

Як показали чисельні експерименти, що частково представлені на рис. 1, форми коливань мають симетрію, яка підпорядковується правилу $u(z) = -u(h + z)$, де $0 \leq z \leq h$. Зі зростанням значення індексу l зростає кількість коливань на періоді повторення форм коливань і зростає кількість вузлових точок.

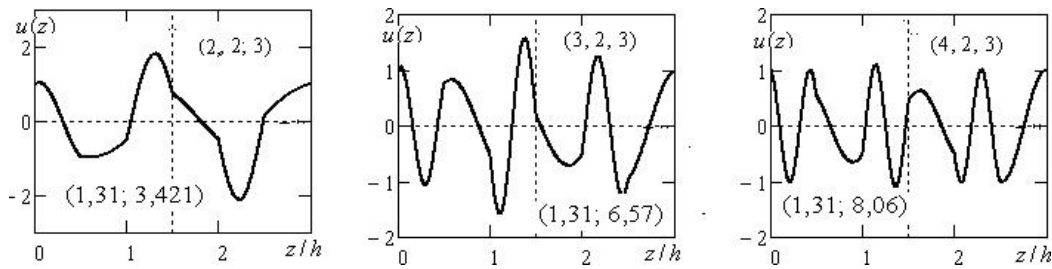


Рис. 2. Форми коливань для частот, які локалізовані в зонах пропускання при $M=3$

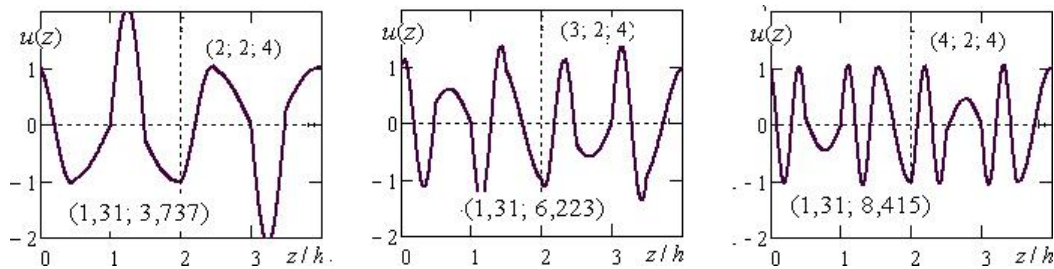


Рис. 3. Форми коливань для частот, які локалізовані в зонах пропускання при $M=4$.

Як випливає з рис. 2 і 3 форми коливань мають різну симетрію при парному значенні M і непарному. При парному M значення $u(z)$ на періоді коливань підпорядковуються правилу $u(z) = -u(Mh/2 + z)$, де $0 \leq z \leq Mh/2$. Зі зростанням значення індексів M або l зростає кількість вузлових точок на інтервалі $0 \leq z \leq Mh$. Якщо M парно, то вузлові точки на періоді коливань будуть при $z = sh$, де $s = 1, 3, \dots, M/2 - 1$. Більшість вузлових точок локалізовані у шарі з мінімальним значенням швидкості $c_i = \sqrt{\mu_i / \rho_i}$. Показано, що форми коливань сильно залежні від значення індексів l і M , а від значень індексу m такої залежності не простежується.

Висновки

У роботі дана постановка та вирішена задача про поширення об'ємних хвиль зсуву в регулярно шаруватих структурах, коли поле коливань має періодом довільне ціле значення періоду структури. Отримано дисперсійні співвідношення для нормальних та об'ємних хвиль. Вид отриманих дисперсійних співвідношень дозволив укласти, що дисперсійні криві для об'ємних хвиль, за винятком меж зон пропускання, збігаються з дисперсійними кривими для нормальних хвиль в регулярно-шаровій платині з вільними від напруг зовнішніми поверхнями. При фіксованому M (M - число періодів структури, відносно якої повторюється поле) дисперсійні співвідношення для об'ємних хвиль мають $M-1$ корінь в кожній з зон пропускання. Кожне з рішень дисперсійного рівняння у випадку може бути охарактеризовано трьома індексами (m, l, M) , де $m = 1, 2, \dots, M-1$, а l - порядковий номер зони пропускання при зростанні частоти від нуля. Соответственно цими ж індексами можуть бути охарактеризовані і типи коливань в періодических структурах. Отметим, что типы колебаний (m, l, M) и (rm, l, rM) являются эквивалентными. В работе показано, что формы колебаний и их симметрия сильно зависят от значения индекса l и M , а от значений индексов m такой зависимости не прослеживается.

При фіксованому M (M - число періодів структури, щодо якої повторюється поле) дисперсійні співвідношення для об'ємних хвиль мають $M-1$ корінь у кожній з зон пропускання. Кожне з рішень дисперсійного рівняння у випадку може бути охарактеризовано

трьома індексами (m, l, M) , де $m = 1, 2, \dots, M - 1$, а l порядковий номер зони пропускання у разі зростання частоти від нуля. Відповідно цими ж індексами можуть бути охарактеризовані і типи коливань у періодичних структурах. Зазначимо, що типи коливань (m, l, M) та (rm, l, rM) є еквівалентними. В роботі показано, що форми коливань та їх симетрія сильно залежні від значення індексу l і M , а від значень індексу m такої залежності не простежується.

Література

ferences

1. Baas F.G., Bulgakov A.A., Tetervov A.P. High-frequency properties of semiconductors with superlattices. M. Nauka, 1989. - 288 p.
2. Bagno A.M. Dispersion spectrum of the wave process in the system ideal fluid layer – compressible elastic layer // Prikl. Mechanics. — 2015. —51, No. 6 – P. 52—60.
3. Rushitsky Ya.Ya. On a nonlinearly elastic Stoneley wave// Prikl. Mechanics. — 2014. —50, No. 6 – P. 39
4. Shulga N.A. Fundamentals of mechanics of layered media with a periodic structure. K.: Nauk Dumka, 1982.- 200 p.
5. Born M., Wolf E. Principles of optics. — Cambridge U.K.: Cambridge University Press, 1999. —986 p.
6. Dieulesant E., Royer D. Ondes elastiques dans les soliedes. Application au raiment du signal. —Paris: Masson et C, 1974. —424 p.
7. Guz A.N. On the foundation of the ultrasonic non-destructive determimation of stresses in near the surface layers of materials. Review // J. Phys.Sci. and Appl. - 2011. -. 1, #1. P.1 - 15.
8. Guz A.N., Rushchitsky J.J. Computational simulation of harmonic wave propagation in fibrious micro and nanocomposites // Compos. sci. and Tech. - 2007. - 67, No. 5. -P. 861-866.
9. Levchenko V.V. Propagation of magnetoelastic shear waves through a regularly laminated medium with metalized interfaces //Int. Appl. Mech. - 2004. - 40, No. 1. – P.97-25