

УДК 621.396

МЕТОДИ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РУХУ МАНЕВРУЮЧИХ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ В ІНФОКОМУНІКАЦІЙНИХ СЕНСОРНИХ МЕРЕЖАХ

DOI 10.36994 / 2788- 5518- 2022-02-04-08

Цуканов О. Ф., к.т.н., доц. Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна.
cukanov-o@ukr.net

Якорнов Є. А., к.т.н., проф. Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна, yakornovits@gmail.com

Анотація: Розглянуто методи оцінки параметрів руху безпілотних літальних апаратів, що знаходяться у складі інфокомунікаційної сенсорної мережі та здійснюють різкий маневр або постійно маневрують. Для підвищення точності оцінювання параметрів руху запропоновано використовувати дробові ряди Тейлора, які в даний час мало вивчені і ще не знайшли належного практичного застосування при описі складних динамічних процесів в різних технічних додатках. На основі математичного моделювання проведено порівняльну оцінку дробових поліномів з поліномами Чебишева та поліномами на основі ряду Тейлора, яка показала, що використання дробових многочленів в «ковзному вікні» дозволяє оцінити не тільки зміни координат і швидкостей, але і фактично дає можливість підвищити точність оцінок координат параметрів руху безпілотних літальних апаратів, які постійно маневрують. Причому найбільш прийнятним многочленом для оцінки є многочлен з дробовими ступенями рівними 0,5 і, на наш погляд, необхідне подальше дослідження поліномів з дрібними ступенями вище ступеня 1,5.

Ключові слова: інфокомунікаційна сенсорна мережа, безпілотні літальні апарати, параметри руху, вектор стану, метод найменших квадратів, фільтр Калмана, дробові ряди Тейлора, поліноми Чебишева, інтервал «ковзаючого вікна».

METHODS FOR EVALUATING THE MOTION PARAMETERS OF MANEUVERING UNMANNED AERIAL VEHICLES IN INFO-COMMUNICATION SENSOR NETWORKS

Oleg Tsukanov, Ph.D., Ass. Prof. National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine. cukanov-o@ukr.net

Yevgenii Yakornov, Ph.D., Prof. National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine. yakornovits@gmail.com

Abstract: Methods for assessing the motion parameters of unmanned aerial vehicles that are part of the infocommunication sensor network and make a sharp maneuver or constantly maneuver are considered. To improve the accuracy of estimating the motion parameters of unmanned aerial vehicles, a mathematical method is proposed based on the use of the capabilities of fractional Taylor series, which are currently little studied and have not yet found proper practical application in the description of complex dynamic processes in various technical applications.

Based on the results of research and mathematical modeling, a number of results were obtained, consisting in the following. For high-precision determination of the coordinates of the motion parameters of unmanned aerial vehicles, it is possible to use algorithms based on the Kalman-Busey filter or the method of least squares with a well-known motion model, since the relative accuracy of estimating these methods is almost the same, and about it is optimal to use these methods simultaneously: first, the method of least squares to obtain an estimate of measurements, and then the Kalman-Busey filter to estimate directly the parameters of motion. However, in order to assess the motion parameters of constantly maneuvering aircraft, it is necessary to use estimation methods based on a sample of measurements in a "sliding window". An equal evaluation using algebraic polynomials, Chebyshev polynomials and fractional polynomials by the method of least squares "in a sliding window" showed

that the use of fractional polynomials makes it possible to evaluate not only changes in coordinates and velocities, but also with the help of fractional derivatives, which occupy an intermediate position between the coordinates, the first and second derivatives. , allows you to improve the accuracy of estimates of the coordinates of the motion parameters of maneuvering unmanned aerial vehicles.

Moreover, the most acceptable polynomial for evaluation is a polynomial with fractional degrees equal to 0.5. and the authors' opinion is expressed on the continuation of studies with degrees above 1.5.

Key words: infocommunication sensor network, unmanned aerial vehicles, motion parameters, state vector, least squares method, Kalman filter, fractional Taylor series, Chebyshev polynomials, "sliding window" interval.

Вступ

Літаючі сенсорні мережі на основі безпілотних літальних апаратів (БПЛА) знаходять дедалі ширше застосування в інфокомунікаційних системах підвищеної живучості [1,2]. Одним із завдань, з яким доводиться стикатися розробникам, при створенні таких мереж, є визначення параметрів руху (ПР) таких БПЛА з високою точністю за наявності дестабілізуючих польотних факторів, таких як вітер (ударна хвиля при веденні бойових дій), зміна атмосферного тиску залежно від висоти польоту та інших. Тому для таких БПЛА траєкторію їхнього польоту слід розглядати як траєкторію об'єкта зі складним видом маневру і що складається з безлічі ділянок, кожна з яких необхідно описувати своєю системою диференціальних рівнянь, тобто характер його переміщення в просторі є траєкторією, на якій можна виділити ділянки з рівномірним рухом, різким маневром та ділянки з безперервним маневруванням об'єкта. Розглянемо підходи оцінки ПР для другого та третього випадків.

Виконання досліджень

Математичну постановку завдання оцінювання ПР БПЛА при їх квазіоднорідному розподілі у просторі сформулюємо в такий спосіб. На підставі наявної інформації про координати $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$ та їх середньоквадратичні помилки (СКО) $\sigma\bar{x}_i, \sigma\bar{y}_i, \sigma\bar{z}_i$, визначити ПР - оцінки вектору стану (ВС) $\bar{X}_n$ координати $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i$, похідних (швидкостей) $\hat{\dot{x}}_i, \hat{\dot{y}}_i, \hat{\dot{z}}_i$ і кореляційної матриці помилок (КМП), оцінки координат елементів K_n і надалі після чергового етапу вимірювань відстаней між сусідніми БПЛА проводити їх уточнення.

Координати БПЛА можуть бути визначені як за допомогою датчиків GPS встановлених на всіх БПЛА так і шляхом взаємного вимірювання відстаней D_{ij} між i -тим і j -тим БПЛА (рис. 1), наприклад, з використанням протоколів IEEE 802.15.4 ZigBee, 6LoWPAN, Thread, RPL [3], (у разі датчиками GPS оснащуються лише 3-4 БПЛА мережі).

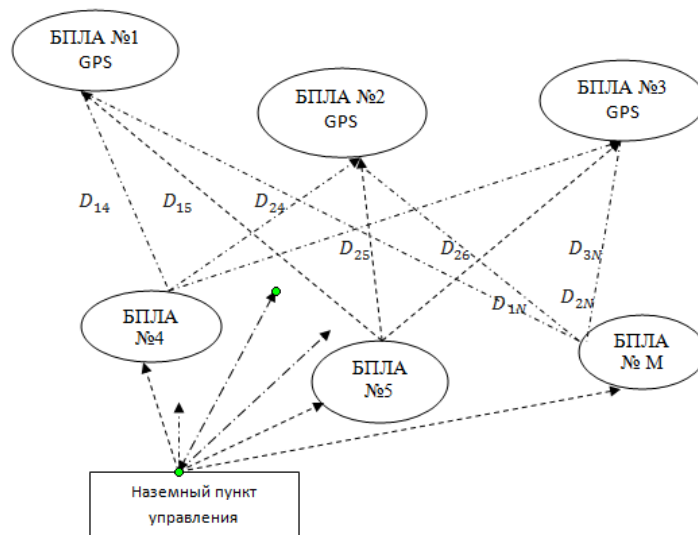


Рис. 1. Конфігурація угруповання БПЛА

Для отримання високоточних оцінок ПР у разі маневру БПЛА за багаторазових вимірів скористаємося алгоритмом оцінювання на основі фільтра Калмана [4]. При цьому припускаємо,

що помилки визначення координат, які, у свою чергу, є вхідною інформацією для алгоритму уточнення розташування елементів інфокомунікаційної сенсорної мережі, мають закон розподілу помилок, який у загальному випадку відрізняється від нормального. Для цього випадку застосування модифікованого алгоритму динамічного оцінювання на основі фільтра Калмана дозволяє, на наш погляд, отримати як стійкі оцінки ПР, так і забезпечити їхню високу точність.

Початковими умовами алгоритму оцінювання є ВС X_{n-1} та апіорна КМО K_{n-1} на $n-1$ кроці вимірювань.

Вектор стану можна записати у вигляді:

$$X_{in}^T = [x_{in}, \dot{x}_{in}, y_{in}, \dot{y}_{in}, z_{in}, \dot{z}_{in}]. \quad (1)$$

Вектор вимірів представляється як:

$$Y_{in}^T = [\widetilde{x}_{in}, \widetilde{y}_{in}, \widetilde{z}_{in}], \quad (2)$$

величини якого визначаються шляхом виміру відстаней між БПЛА.

При цьому екстраполіроване значення ВС у загальному вигляді можна подати таким чином:

$$X_{in}^e = F_{in,n-1} X_{in-1} + G_{n-1} U_{n-1}, \quad (3)$$

де $F_{in,n-1}$ - матриця екстраполяції виду

$$F_{in,n-1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

G_{n-1} - матриця управління

$$G_{in,n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta t^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta t^2/2 \end{bmatrix};$$

$$U_{n-1}^T = [0 \ 0 \ 0 \ a_{x,n-1} \ a_{y,n-1} \ a_{z,n-1}] - \text{вектор управління};$$

Δt - час між вимірами відстані між БПЛА;

$a_{x,n-1} \ a_{y,n-1} \ a_{z,n-1}$ - прискорення БПЛА за координатами.

Якщо позначити S_{n-1} - як КМП вектор управління, то уточнене значення апіорної КМО вектор управління можна записати у вигляді:

$$S_{n-1}^* = S_{n-1} \gamma, \quad (4)$$

де γ - параметр стійкості процесу оцінювання.

За аналогією з (3) екстраполіровану апіорну оцінку КМП можна також подати наступним чином:

$$K_{in}^e = F_{in,n-1} K_{in-1} F_{in,n-1}^T + G_{n-1} S_{n-1}^* G_{n-1}^T, \quad (5)$$

де K_{in-1} - екстраполірована апіорна КМП.

Для подальших викладок визначимо матричний коефіцієнт посилення:

$$H_{in} = K_{in}^e (K_{in}^e + Q_{in})^{-1}, \quad (6)$$

де Q_{in} - КМП вектору вимірювань Y_{in} , на n -му кроці.

Тоді оцінку ВС, подану у вигляді $\widehat{X}_{in} = [\widehat{x}_{in}, \widehat{\dot{x}}_{in}, \widehat{y}_{in}, \widehat{\dot{y}}_{in}, \widehat{z}_{in}, \widehat{\dot{z}}_{in}]^T$, можна в загальному випадку надати як:

$$\widehat{X}_{in} = X_{in}^e + H_{in}(Y_{in} - X_{in}^e), \quad (7)$$

а апостеріорну КМП оцінювання:

$$\widehat{K}_{in} = K_{in}^e - K_{in}^e H_{in}. \quad (8)$$

При цьому $\widehat{K}_{in}$ у розгорнутому вигляді представляємо матрицею виду:

$$\widehat{K}_{in} = \begin{bmatrix} \sigma x^2 & s_{x\dot{x}} & s_{xy} & s_{x\dot{y}} & s_{xz} & s_{x\dot{z}} \\ s_{y\dot{y}} & \sigma \dot{x}^2 & s_{\dot{x}y} & s_{\dot{x}\dot{y}} & s_{\dot{x}z} & s_{\dot{x}\dot{z}} \\ s_{xy} & s_{\dot{x}y} & \sigma y^2 & s_{y\dot{y}} & s_{yz} & s_{y\dot{z}} \\ s_{x\dot{y}} & s_{\dot{x}\dot{y}} & s_{y\dot{y}} & \sigma \dot{y}^2 & s_{\dot{y}z} & s_{\dot{y}\dot{z}} \\ s_{xz} & s_{\dot{x}z} & s_{yz} & s_{\dot{y}z} & \sigma z^2 & s_{z\dot{z}} \\ s_{x\dot{z}} & s_{\dot{x}\dot{z}} & s_{y\dot{z}} & s_{\dot{y}\dot{z}} & s_{z\dot{z}} & \sigma \dot{z}^2 \end{bmatrix}.$$

Тут $\sigma x^2, \sigma y^2, \sigma z^2$ - дисперсії помилок по координатах, $\sigma \dot{x}^2, \sigma \dot{y}^2, \sigma \dot{z}^2$ – дисперсії помилок по швидкостям, а s_{ab} - взаємні кореляційні моменти. Зауважимо, що склад вектору вимірювань Y_{in} та вектору стану X_{in}^e однаковий, тому матриця вимірювань поодинокі і не показана.

Наведені вище вирази (3) - (8) і є основою пропонованого стійкого алгоритму оцінювання вектору $\widehat{X}_{in}$ і КМП $\widehat{K}_{in}$ кожного БПЛА. Ця оцінка проводиться щоразу, як у сенсорній мережі БПЛА вимірюються відстані та його помилки до сусідніх БПЛА. Як модель руху приймаємо гіпотезу про рух БПЛА із постійним значенням прискорення між сеансами визначення координат.

Розглянутий алгоритм оцінювання (3)-(8) дозволяє забезпечити стійке оцінювання ВС при раптовій зміні траєкторії руху БПЛА. Оцінки вектору стану БПЛА включають координати $[\widehat{x}_{in}, \widehat{y}_{in}, \widehat{z}_{in}]^T$. При цьому помилки визначення координат $\sigma x_i, \sigma y_i, \sigma z_i$ і без урахування кореляційних моментів можуть бути графічно представлені у вигляді прямокутного паралелепіпеда в центрі якого знаходиться БПЛА.

Аналогічно - за швидкісними складовими ВС $[\widehat{\dot{x}}_{in}, \widehat{\dot{y}}_{in}, \widehat{\dot{z}}_{in}]^T$ також можна подати у вигляді паралелепіпеда але з великими розмірами за абсолютними величинами. Якщо "обсяг" таких паралелепіпедів буде досить малим, можна говорити про стійке автосупровід кожного БПЛА з високою точністю. Якщо такого високоточного автосупроводу не потрібно, тоді оцінюються лише координати розташування.

Стійкість оцінювання ВС БПЛА забезпечимо "примусовим збільшенням" значень діагональних елементів $\sigma \dot{x}^2, \sigma \dot{y}^2, \sigma \dot{z}^2$ матриці $G_{in,n-1}$ в (3) шляхом множення на параметр γ . Ця операція, у свою чергу, призводить до обмеження знизу значень елементів матричного коефіцієнту посилення $\widehat{K}_{in,n}$ в (8). Таким чином, константами в алгоритмі є параметр γ і величина Δt . У зв'язку з цим, при моделюванні можна заздалегідь поставити елементи КМП вектору управління S_{n-1}^* (4) для забезпечення стійкості та необхідної точності оцінювання.

Для перевірки запропонованого алгоритму використовувалася модель руху БПЛА на основі реальних технічних характеристик БПЛА типу "Орлан" [5], яка описувалася алгебраїчним поліномом 5-го ступеня за координатами:

$$\tilde{Z}_t = a_0 + a_1 t_{i-1} + a_2 t_{i-1}^2/2 + a_3 t_{i-1}^3/6 + a_4 t_{i-1}^4/24 + a_5 t_{i-1}^5/120, \quad (9)$$

поліномом 4-го ступеня за швидкостями:

$$\tilde{\dot{Z}}_t = a_1 + a_2 t_{i-1} + a_3 t_{i-1}^2/2 + a_4 t_{i-1}^3/6 + a_5 t_{i-1}^4/24 \quad (10)$$

і поліномом 3-го ступеня за прискореннями:

$$\tilde{Z}_t = a_2 + a_3 t_{i-2} + a_4 t_{i-2}^2 + a_5 t_{i-1}^3 / 6. \quad (11)$$

Деякі результати моделювання траєкторій польоту БПЛА за його прямолінійному русі з маневрами представлені на рис. 2, а оцінювання роботи алгоритму під час розвороту на 90° для різних значень параметра γ - в табл. 1.

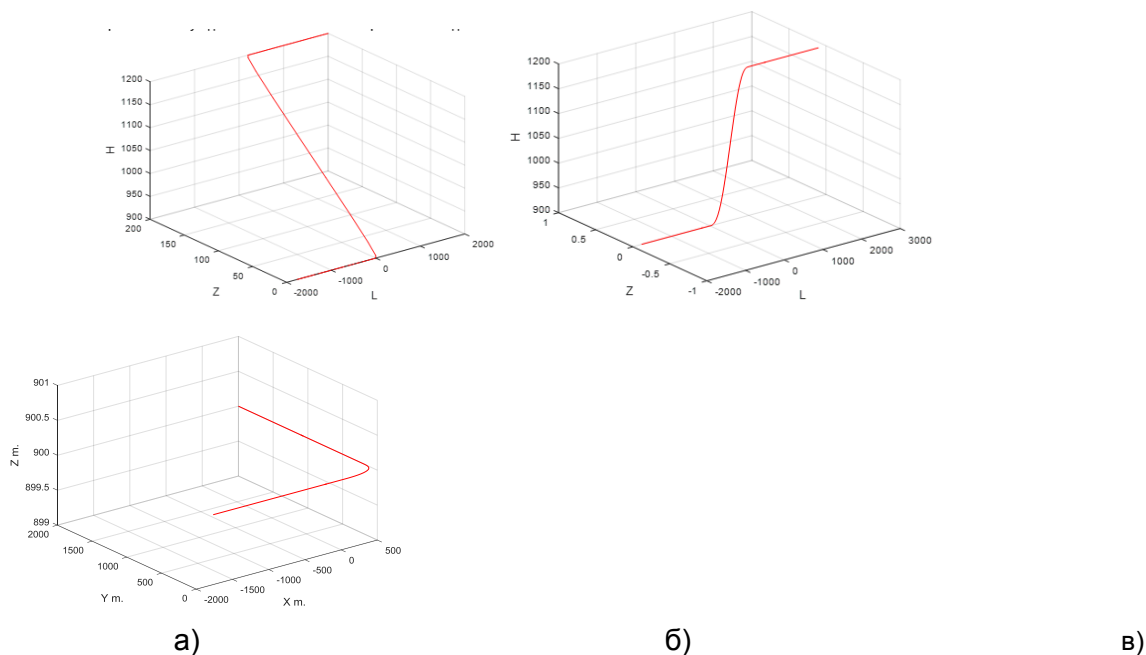


Рис. 2. Траєкторії польоту БПЛА з маневрами: а) уникнення лобового зіткнення; б) набір висоти; в) плавний розворот на 90°

Таблиця 1.

Результати моделювання роботи алгоритму оцінювання під час розвороту на 90° для різних значень параметра γ .

Значення параметра γ .	Характер алгоритму	СКО максимальних помилок оцінювання по координатах X,Y,Z під час зміни траєкторії руху, м			Помилки по швидкостям, м/с		
		σX	σY	σZ	σV_x	σV_y	σV_z
0	Нестійкий	-	-	-	-	-	-
0,1	Стійкий	19	6	7	18	6	0,1
0,4	Стійкий	9	1,7	1,5	12	5	0,1
0,8	Стійкий	5,8	1,9	0,4	10	3	0,1

Результати моделювання роботи алгоритму показують, що при $\gamma = 0$ алгоритм нестійкий, помилки оцінювання по всім координатам швидко зростають, тобто відомий фільтр Калмана нестійкий. У той самий час при значеннях $0.4 \leq \gamma \leq 0.8$ (табл. 1) запропонований алгоритм забезпечує стійкість процесу оцінювання.

Аналіз величини помилки оцінювання за координатами і швидкостями із усередненням по 100 реалізаціям показує, що з прямолінійного руху максимальна помилка за координатами становить 4,5 м при $\gamma=0.1$, а мінімальна 1.6 м при $\gamma=0.8$, але в ділянці маневру - максимальна помилка по координатам становить 18 м при $\gamma=0.1$, а мінімальна 5 м при $\gamma=0.4$. Також на ділянці маневру максимальна помилка за швидкостями становить 18 м/с при $\gamma=0.1$, а мінімальна - 10 м/с при $\gamma=0.4$.

Оптимальне значення з допомогою якого отримані такі помилки оцінювання дорівнює 0.8. При цьому значення забезпечується стійке оцінювання ПР БПЛА при досягненні мінімального значення помилки визначення ВС в середньому за 8 кроків оцінювання.

Однак, основним недоліком розглянутого алгоритму є той факт, що у разі наявності маневру, фільтр Калмана-Бьюсі деякий час працюватиме на перехідній ділянці оцінювання, а після чого на стаціонарному. У той же час, при короткочасному маневрі, робота фільтру Калмана-

Бьюсі завжди буде на перехідній ділянці. А якщо характер руху БПЛА є траєкторією руху об'єкта, що постійно маневрує, то за допомогою алгоритмів на основі фільтра Калмана отримання високоточних оцінок ПР неможливо.

І тим не менш, для високоточного визначення координат ПР БПЛА як елементів інфокомунікаційних сенсорних мереж можна застосовувати алгоритми на основі фільтра Калмана-Бьюсі або методу найменших квадратів (МНК). Потенційна точність оцінювання цих методів практично однакова. Оптимальним підходом до оцінювання ПР є використання цих методів одночасно. Причому в такій послідовності: спочатку МНК для одержання оцінки вимірювань, а далі фільтр Калман-Бьюсі для оцінки ПР. Іншими словами, такий фільтр необхідно використовувати за наявності відомої моделі руху. Але це тільки при роботі з БПЛА, що маневрує, у разі наявності постійного маневру такий підхід не прийнятний. Отже, для оцінювання ПР БПЛА, які постійно маневрують, необхідне використання методів оцінювання вибірки вимірювань.

Такий підхід дозволяє досить просто вирішити питання вибору моделі руху в умовах постійного маневру. При цьому питання забезпечення стійкості оцінювання - це наявність вибірки вимірювань, а забезпечення необхідної точності - підбір полінома апроксимації. Ще одним важливим параметром, величина якого визначає помилку оцінювання, є ширина "ковзного вікна". Цей параметр може задаватися у вигляді часового інтервалу або кількості вимірювань, за якими надалі визначаються коефіцієнти апроксимації та оцінка параметра, що знаходиться.

Завдання вибору ступеня полінома апроксимації залежить від виду та інтенсивності маневру БПЛА. Наприклад, вважається, що у польоті БПЛА здійснює перехід від рівномірного руху до маневру, то ступінь полінома слід підвищувати. І при цьому кількість членів апроксимуючого полінома збільшується. Змінюється як ступінь полінома, а й значення кожного коефіцієнта цього полінома. Зауважимо, що ступінь полінома змінюється дискретно залежно від помилки оцінювання.

Тому досліджуємо методом математичного моделювання наступне завдання: не збільшуючи ступеня апроксимуючого полінома забезпечити підвищення точності оцінювання при оцінці ПР БПЛА, що постійно маневрує.

Для цього розглянемо ряд Г'юїзе [6] з однією змінною. Це формальний вираз алгебри:

$$F(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^{\frac{n}{m}}, \quad (12)$$

в якому число n_0 - ціле, число - натуральне число (при виходить звичайний статечний ряд), коефіцієнти a_n беруться з деякого кільця

Враховуючи той факт, що $F(x)$ набуває речових значень, у разі коли $n < m$, коефіцієнти a_n повинні бути комплексними.

У деяких практичних програмах змінна x не може бути комплексною, наприклад, якщо така змінна x - час. Ряд (12) у разі коли змінна x набуває речового значення, а значення $n_0 = 0$ може бути представлений у вигляді суми двох рядів (без залишкового члена:

$$F(x) = T(x) + R(x) \quad . \quad (13)$$

Тут $T(x)$ – ряд Тейлора, $R(x)$ – ряд, що з дробових членів. Назвемо ряд (13) дробовим рядом Тейлора. Відомий ряд Тейлора [7] у цілих похідних має вигляд:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} \quad (14)$$

або у загальному вигляді $f(x) = \sum_{k=0}^n f(x_0)^k \frac{(x-x_0)^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Уявимо ряд Тейлора (14) для дробових похідних [6]. Для цього функції заданої на відрізку $[a, b]$ можуть бути представлені у вигляді:

$$D_{a+}^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^a}, \quad (15.a)$$

$$D_{b-}^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-a)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t) dt}{(x-t)^a} \quad (15.6)$$

і називаються правою і лівою похідними дробовими порядку, $0 < \alpha < 1$, відповідно лівосторонньої і правосторонньої. Тут $\Gamma(1-\alpha)$ - гамма функція Ейлера.

Дробові похідні у вигляді (13) ще називають [6] похідними Рімана - Ліувілля. У випадку, якщо є загальний аналітичний вираз для похідної n -го порядку, поняття дробової похідної може бути введене природним шляхом узагальнення даного виразу (коли це можливо) на випадок довільного числа.

Тоді загальновідомий запис першого похідного для функцій $f(x) = x^k$, представимо як:

$$f(x)' = \frac{d}{dx} f(x) = k x^{k-1}, \text{ а узагальнено:}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}, \quad (16)$$

Після заміни факторіалів гамма-функціями можна подати у вигляді:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}. \quad (17)$$

Далі без суворого математичного обґрунтування введемо припущення: якщо існує ряд Тейлора для похідних, то такий ряд може існувати і з дробовими похідними для $n_0 = 0$, і речовими коефіцієнтами.

Тоді з урахуванням існування [6] дробових похідних такий ряд має вигляд:

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^n f(x_0)^k \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k-n+1)} (x - x_0)^{k-n}, \quad (18)$$

де $k=0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, \dots$

Назвемо додаткові члени введеного ряду дробовими. Зауважимо, що з ряду Тейлора (18) не можна стверджувати, що ряд є схожим як і ряд (12). Причиною цього є відсутність ортогональності членів одержаного ряду.

Так, наприклад, для ряду (12) функції $1, x^1, x^2, \dots, x^n$ - є ортогональними, в той же час для ряду (16) $x^{1/2}, x^1, x^{3/2}, x^2, \dots$ дробові та цілі члени є ортогональними в іншій метриці. Можна стверджувати, що ряд (18), має розширені властивості порівняно з рядом (14).

Зауважимо, що автори не претендують на математичну строгість використання ряду (16). Наше завдання: з'ясувати шляхом моделювання, що з використанням ряду Тейлора (16) для оцінювання ПР БПЛА, яке маневрує, методом МНК чи призведе лі до підвищення точності оцінювання порівняно з використанням ряду (12). Надія на цей виграш обумовлена тим, що використання ряду (16) дозволяє збільшити дискретність оцінки похідних складових траєкторії руху БПЛА.

Для початку порівняємо дробовий ряд Тейлора зі звичайним його поряд. Обмежимося також використанням ряду (18) для похідних не вище $3/2$ і залишимо поки що осторонь фізичний зміст коефіцієнтів при дробових похідних да спробуємо пояснити з математичної точки зору сутність дробової похідної.

Наприклад, для похідної дробової дорівнює $1/2$ її величина займає середнє значення між першоподібною і першою похідною. Відповідно, похідна $3/2$ - середнє значення між першою та другою похідною і т.д. При цьому можна стверджувати, що якщо, наприклад, n - я похідна дорівнює 0, а $n-1$ відмінна від нуля, то похідна, яка займатиме проміжне положення не завжди буде нульовою. Проведений авторами попередній аналіз фізичного сенсу коефіцієнта апроксимації при ступені $3/2$ показує, що його не потрібно враховувати, якщо значення цього параметра не використовується в наступних розрахунках у цьому і є деяке обмеження використання дробових рад Тейлора.

Тим більше, такі випадки існують при використанні МНК з ортогональними поліномами Чебишева [8], привабливість яких полягає в тому, що при підвищенні ступеня полінома необхідно розрахувати лише один коефіцієнт при цьому ступеню, а при зменшенні нічого не потрібно розраховувати - просто слід відкинути старший член ряду Чебишева. У цьому самі коефіцієнти низки фізичного сенсу немає, а за використанні ортогональних поліномів Чебишева необхідно додатково визначати відомі фізичні значення: становище, швидкість і прискорення. Виходячи з

вищевикладеного, проаналізуємо застосування введеного ряду Тейлора (16) з дробовими похідними стосовно задачі оцінювання ПР БПЛА.

Нижче наведено деякі результати моделювання, отримані за допомогою програми MATLAB. На рис. 3 показані результати апроксимації полінома четвертого ступеня з розподіленим шумом за нормальним законом (поліном імітації) з дисперсією помилки рівною 10 м^2 . - штрих пунктирна лінія, на всьому інтервалі за МНК поліномом другого ступеня виду:

$$Y = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2, \quad (19)$$

- суцільна лінія, і за МНК поліномом ступеня $3/2$ через дробові ступеня $1/2$:

$$Y = a_0 + a_1^* x^{0.5} + a_2 x^1 + a_3^* x^{\frac{3}{2}}, \quad (20)$$

де a_1^* , a_3^* - коефіцієнти має сенс дробових похідних - пунктирна лінія.

З графіків видно, що помилка оцінювання при оцінюванні МНК поліномом (18) зменшується на 10-15%.

Аналогічно на рис 4. показаний результати апроксимації полінома третього ступеня з шумом розподіленим за нормальним законом з дисперсією помилки, що дорівнює 5 м^2 - штрих пунктирна лінія, за методом МНК поліномом (17) - суцільна лінія, і дробовим поліномом виду:

$$Y = a_0 + a_1 x^{0.5} + a_2 x^1. \quad (21)$$

Результати моделювання показують, що і в даному випадку застосування полінома з дрібним ступенем дозволяє підвищити точність оцінювання до 20%.

Ці та інші результати моделювання (графіки мають вигляд аналогічний на рис. 3,4) для наочності зведені в табл. 2.

З таблиці 2 видно, що використання запропонованого дробового ряду Тейлора в задачі оцінювання ПР постійно маневрують БПЛА, коли їх траєкторія руху описується поліномом більш високого ступеня, що дозволяє підвищити точність оцінювання. Понад те, кожного класу БПЛА можна зафіксувати ступінь полінома для оцінювання ПР. Це значно спростить структуру програмного забезпечення без погіршення точності.

Зауважимо, що оцінювання з МНК з використанням дробових рядів Тейлора переважно в тому випадку, коли порядок полінома імітації вище за поліном апроксимації. Якщо ступінь поліномів імітації і апроксимації збігаються, то використання дробових рядів Тейлора не має сенсу. Але саме тут і проявляється основна перевага використання дробового ряду Тейлора, яка полягає в тому, що знати порядок полінома апроксимації в загальному випадку не потрібно. Інакше кажучи, якщо є вимоги до точності оцінювання, слід заздалегідь вибрати ступінь дробового ряду Тейлора, що дозволить забезпечити підвищення точності оцінювання проти відомим рядом Тейлора.

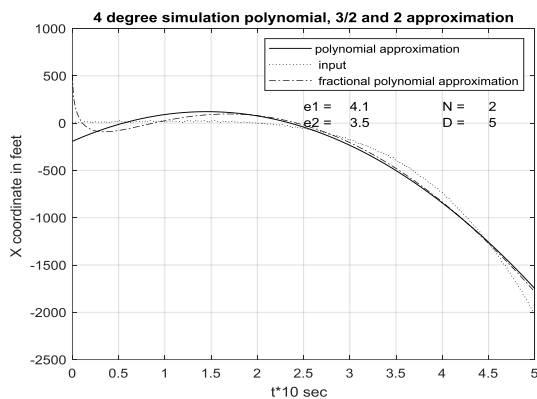


Рис 3. Апроксимація полінома четвертого ступеня дисперсією помилки, що дорівнює 10 м^2

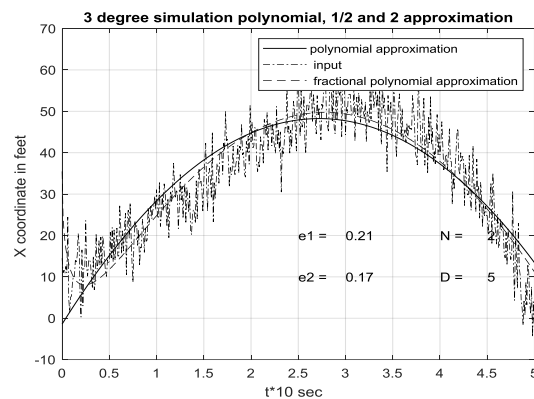


Рис 4. Апроксимація полінома третього ступеня з дисперсією помилки, що дорівнює 5 м^2

Таблиця 2.
Характеристики помилок оцінювання

Ступінь апроксимації поліномом імітації	4	3	3	3	3
Ступінь апроксимації цілим поліномом	2	2	2	2	3
Ступінь апроксимації дробовим поліномом	3/2	1/2	2	2.5	2.5
Помилка апроксимації цілим поліномом	4.1	0.21	0.33	0.21	0.026
Помилка апроксимації дробовим поліномом	3.5	0.17	0.26	0.02	0.031
Підвищення точності, %	15%	20%	22%	90%	-15%

Подальше дослідження полягало у порівнянні показників оцінювання МНК у “ковзному вікні” і з оцінкою поліномами Чебишева, дробовими і звичайними рядами Тейлора. Для такого порівняння розглянемо поліноми Чебишева першого, другого та третього роду, поліноми на основі дробового ряду Тейлора та поліноми на основі традиційного ряду Тейлора або просто алгебраїчні:

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_1 t^2, \quad (22)$$

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_1 t^2 + a_1 t^3, \quad (23)$$

багаточлени Чебишева першого роду другого і третього порядку:

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x; \quad T_2(x) = 2x^2 - 1; \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$

$$T_n(x) = 2x T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x); \quad (24)$$

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 (2t^2 - 1),$$

$$y(t) = a_0 + a_1 t + a_2 (2t^2 - 1) + a_3 (4t^3 - 3x). \quad (25)$$

та дробові поліноми на основі ряду Тейлора:

$$y(t) = a_0 + a_1 t^{0.5} + a_2 t^1. \quad (26)$$

$$y(t) = a_0 + a_1 t^{0.5} + a_2 t + a_3 t^{1.5}. \quad (27)$$

Припустимо, що БПЛА постійно здійснює маневр відповідно до полінома 3-го порядку та параметрів шуму розподіленого за нормальним законом розподілу нульовим середнім і дисперсією рівною 25 м². Поставимося також шириною “ковзного вікна” W=12 або 6, для многочленів Чебишева на інтервалі [-1;1].

Оцінювання МНК з будь-якими поліномами вимагає звернення матриці. При оцінюванні по МНК з поліномами Чебишева цьому інтервалі при великій ширині “ковзного вікна” виникають проблеми з зверненням матриці. У такому разі слід використовувати метод Зейделя. Відомо також, що багаточлени Чебишева мають найкраще наближення серед усіх відомих багаточленів.

При використанні багаточленів (25-26) також виникають проблеми із обігом матриці. Рекомендуємо використовувати інтервал оцінювання рівний [1;5] і тоді проблем із оберненням матриці не виникає.

Результати моделювання показані на рисунках 5,6 та табл. 3. Зокрема, на рис. 5,6 показані оцінки траєкторії руху алгебраїчним поліномом – штрих пунктирна лінія, поліномом Чебишева – пунктирна лінія, дробовим поліномом (26) – суцільна лінія, а в табл. 3 – характеристики оцінювання.

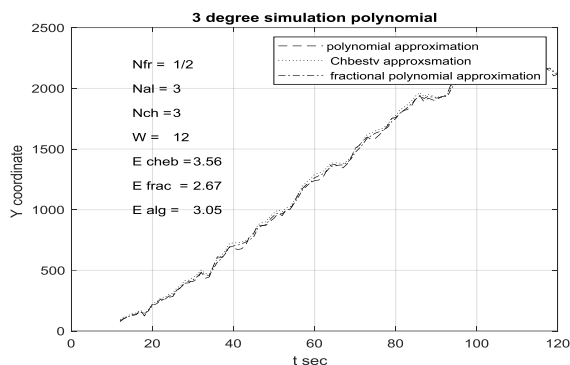


Рис. 5. Траєкторія руху зі ступенем дробового полінома $N_{fr} = 1/2$

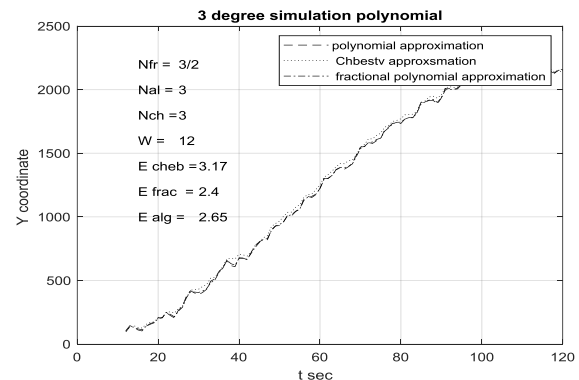


Рис. 6. Траєкторія руху зі ступенем дробового полінома $N_{fr} = 3/2$

Як видно з рис. 5 і табл. 3 точність оцінювання дробовим поліномом на 13% вище ніж алгебраїчним і на 25% вище ніж багаточлен Чебишева. Останнє обумовлено шириною інтервалу «ковзного вікна». У той же час, точності оцінювання дробовим і поліномом Чебишева збігаються. При варіанті моделювання на рис. 6 точність оцінювання дробовим поліномом на 8% вище ніж алгебраїчним і на 25% вище за поліном Чебишева, що обумовлено шириною «ковзного вікна».

Таблиця 3.
Характеристики оцінювання в «ковзному вікні»

№	Ширина вікна (W)	Ступінь полінома та помилка оцінювання	Алгебраїчний поліном	Поліном Чебишева	Дробний поліном
1 (рис.5)	12	ступінь полінома	$N_{al} = 3$	$N_{ch} = 3$	$N_{fr} = 1/2$
		помилка оцінювання	3.05	3.56	2.67
2 (рис. 6)	12	ступінь полінома	3	3	$3/2$
		помилка оцінювання	2,65	3.17	2.4
3	6	ступінь полінома	3	3	$1/2$
		помилка оцінювання	2,93	2,45	2,55
4	6	ступінь полінома	3	2	$1/2$
		помилка оцінювання	2,87	2,65	2,58
5	6	ступінь полінома	3	2	$3/2$
		помилка оцінювання	2,25	2,14	2,22
6	6	ступінь полінома	3	3	$3/2$
		помилка оцінювання	2,52	2,25	2,41

Максимальна точність оцінювання досягається поліномом (26) із шириною «ковзного вікна» $W = 12$. З результатів моделювання та таблиці 3 випливає, що необхідно звернути увагу на поліном (26). Використання цього полінома, за певних умов, забезпечує максимальну точність оцінювання проти поліномами Чебишева і поліномом з урахуванням ряду Тейлора.

Висновки

1. Для інфокомунікаційних сенсорних мереж на основі БПЛА запропоновано стійкий алгоритм оцінювання ПР літаючих об'єктів для випадків їх різкого маневрування шляхом багаторазових вимірювань відстаней між ними, формування вектору стану та КМО координат та подальшого уточнення координат та їх похідних за допомогою фільтра Калмана.

2. Для БПЛА, що постійно маневрує, результати досліджень показують, що застосування дробових рядів Тейлора дозволяє суттєво розширити клас завдань при використанні МНК у задачах оцінювання ПР літаючих об'єктів як елементів бездротових сенсорних мереж, зокрема,

не використовувати рекурентні алгоритми оцінювання з елементами адаптації шляхом зміни ступеня полінома.

3. З результатів моделювання слід, що для БПЛА, яке постійно маневрує, найбільш прийнятним поліномом оцінювання є МНК з дрібними степенями $1/2$ і, на наш погляд, необхідне подальше дослідження поліномів з дрібними степенями вище ступеня $3/2$.

4. Застосування дробових поліномів в інфокомунікаціях та інших галузях техніки обмежується відсутністю фізичного сенсу дробових похідних і проте проведені дослідження з використання дробових поліномів показали отримання більшої точності оцінювання ПР БПЛА порівняно з поліномами Чебишева за великої ширини «ковзного вікна».

Література

1. Romaniuk V. Increasing the efficiency of data gathering in clustered wireless sensor networks using UAV / V. Romaniuk, O. Lysenko, A. Romaniuk and. Zhuk O. *Information and telecommunication sciences*. 2020. Vol, №. 1. pp. 102-107.
2. Yakornov Y. and Tsukanov O. Sustainable Algorithm for Estimating the Motion Parameters of Unmanned Aerial Vehicles. International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo) – Proceedings, September 2019, pp. 1-5.
3. Langdon M. ZigBee goes underground, E&T Magazine. 2009, Aug.
4. Grewal M. and Andrews A. Kalman Filtering — Theory and Practice Using MATLAB, Wiley.2001.
5. Мельник Н.О. Полная математическая модель беспилотного летательного аппарата в условиях движения с возмущающими воздействиями. *Вестник Воронежского государственного технического университета* ISSN: 1729-6501, 2015, том 11, № 2, С. 31-33.
6. Kilbas A., Srivastava H. and Trujillo J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
7. Sierociuk D. Fractional Kalman Filter algorithm for states, parameters and order of fractional system estimation, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2006, Vol.16, No.1, pp, 129–140.
8. Lysenko O., Novikov V. and Alekseeva I. Optimization of Unmanned Aerial Vehicle Path for Wireless Sensor Network Data Gathering. 3rd International Conference: Actual problems of unmanned aerial vehicles developments (APUAVD-2015) – Proceedings, October 2015, pp.280-283.

References

1. Romaniuk V. Increasing the efficiency of data gathering in clustered wireless sensor networks using UAV / V. Romaniuk, O. Lysenko, A. Romaniuk and. Zhuk O. *Information and telecommunication sciences*. 2020. Vol, №. 1. pp. 102-107.
2. Yakornov Y. and Tsukanov O. Sustainable Algorithm for Estimating the Motion Parameters of Unmanned Aerial Vehicles, // International Conference on Information and Telecommunication Technologies and Radio Electronics (UkrMiCo) – Proceedings, September 2019, pp. 1-5.
3. Langdon M. ZigBee goes underground, E&T Magazine, 2009, Aug.
4. Grewal M. and Andrews A. Kalman Filtering — Theory and Practice Using MATLAB, Wiley, 2001.
5. Melnik N.O. Polnaia matematicheskaia model bespilotnogo letatel'nogo apparata v usloviakh gvizheniia s vozmushchaiushchimi vozddeystviiami. [Complete mathematical model of an unmanned aerial vehicle in traffic conditions with disturbing influences]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* ISSN: 1729-6501, 2015, tom 11, № 2, C. 31-33.
6. Kilbas A., Srivastava H. and Trujillo J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
7. Sierociuk D. Fractional Kalman Filter algorithm for states, parameters and order of fractional system estimation, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2006, Vol.16, No.1, pp, 129–140.
8. Lysenko O., Novikov V. and Alekseeva I. Optimization of Unmanned Aerial Vehicle Path for Wireless Sensor Network Data Gathering // 3rd International Conference: Actual problems of unmanned aerial vehicles developments (APUAVD-2015) – Proceedings, October 2015, pp.280-283.